

Análise e Síntese em Matemática

João Bosco Pitombeira de Carvalho

Programa PROFMAT
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Análise e Síntese em Matemática

1 Introdução

As discussões sobre o que consistem o método analítico e o método sintético são constantes, desde a antiguidade, e as concepções dos matemáticos e filósofos da matemática sobre o assunto variam muito, por vezes contraditórias; ainda mais amplas e complexas são as discussões dos filósofos sobre este tema, como se pode ver em Otte e Panza (Otte and Panza 1997) e também na *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, disponível na Internet.

Nosso objetivo é mostrar, por meio de dois exemplos, a diferença entre o método sintético e o analítico. Faremos isso, apresentando duas soluções para cada um dos problemas, uma analítica e a outra sintética.

Para situar os leitores, apresentamos, antes de abordar os exemplos, como, ao longo dos tempos, o método analítico e o sintético foram comparados.

Em primeiro lugar, vejamos o que um importante autor grego, Pappus, devido a quem sabemos muito da matemática grega antiga, afirma:

O campo da análise, tal como o concebo, meu filho Hermodoro, é a maneira específica de que dispomos que, após ter dominado os elementos mais comuns, desejam colher das linhas o poder de encontrar os problemas que lhes são propostos. Seguindo pelo caminho da análise e da síntese que este assunto foi tratado por três homens: Euclides, autor dos *Elementos*, Apolônio de Perga e Aristeu o Velho. A análise é portanto o caminho que parte do que é procurado, considerada como aceite, para chegar, por meio de consequências que daí decorrem, à síntese do que foi aceite. Com efeito, supondo que, na análise, o que é procurado é obtido, considera-se o que decorre disso e aquilo que o precede, até que, recuando, chegue-se a algo já conhecido ou que é levado em conta pelos princípios aceites; e designamos este encaminhamendo de *análise*, levando em conta que ele inverte o sentido do desenrolar da solução. Na síntese, ao contrário, supondo que o resultado finalmente percebido usando a síntese já tenha sido achado pela análise, e colocando então suas consequências e suas causas em sua ordem natural, e encadeando-as, chega-se por fim a contruir o que é procurado; e é isso que designamos como síntese.¹ (Pappus 1933, p. 477)

Passemos agora ao século XVI e vejamos o que grande inovador François Viète pensava sobre o assunto:

¹Todas as traduções são do autor deste trabalho. Devido a seu caráter expositivo, nem todos os textos originais figuram em rodapé ou notas finais.

Encontramos na matemática uma certa maneira e moda de procurar a verdade, a qual diz-se ter sido em primeiro lugar inventada por Platão, que Theon chama de análise, e definida por ele como a aceitação do que é procurado, como se ele fosse aceito, para chegar à verdade procurada, e isso por meio dos efeitos; ao contrário, a síntese é a aceitação de uma coisa já conhecida para chegarmos ao conhecimento do que procuramos por meio dos efeitos. (Viète 1630, 1)

No século seguinte, assim escreveu Descartes

(...) os antigos geômetras serviram-se de uma análise que estendiam à resolução de todos os problemas, mas da qual, com ciúmes, privaram a posteridade. (Descartes, *Regras para a Direção do Espírito*, Guinsburg, Romano e Cunha 2010, p. 415)

Um pouco mais tarde, no Iluminismo, a *L'Encyclopédie Méthodique* explica que

Distingue-se geralmente nas ciências exatas dois tipos de métodos, a análise e a síntese. Mas na matemática estes métodos têm dois sentidos; um que é o mesmo que eles têm em outras áreas; o outro só foi introduzido após a revolução feita por Descartes.

Pela análise procura-se uma verdade desconhecida; pela síntese prova-se uma verdade enunciada.

(...)

Da-se também o nome de síntese à geometria dos antigos, e o de análise à álgebra literal usada pelos modernos.

(...) mas em geral há diferenças essenciais que fazem com que o método dos modernos seja definitivamente preferido.

(...)

Enfim, as operações da síntese são mais complicadas, seu desenvolvimento difícil de ser seguido e seus resultados menos gerais (...) dessa maneira ela foi abandonada por quase todos os geômetras. (D' Alembert et autres 1785, 389-390)

Heath, em seu *History of Greek Mathematics* explica:

(...) Platão explicou a Leodamo de Thasos o método de pesquisa chamado de análise; o relato de Proclus é mais completo, afirmando que o melhor método para descobrir lemas em geometria é o que por meio da análise leva o que se quer conhecer até a um princípio reconhecido, um método que dizem foi comunicado por Platão a Leodamo, e por meio do qual este último, como afirmado, descobriu várias coisas em geometria⁷. Nada além disso conhecemos sobre Leodamos, mas os trechos são importantes por terem dado origem à ideia de que foi Platão quem inventou o método da análise matemática, uma ideia que, como veremos posteriormente, parece se basear em um equívoco. (Heath 1921, p. 213)

E ele continua:

A primeira parte da passagem acima, com afirmação semelhante em Diógenes Laercio afirmando que Platão "explicou a Deodamos de Thasos o método de pesquisa chamado análise", tem sido geralmente interpretado com atribuindo a Platão a invenção do método de análise em matemática. Mas como a análise, de acordo com as interpretações antigas nada mais do que uma 'sucessão de reduções de um teorema ou um problema até que chegar a uma teorema ou problema já conhecido, , é difícil ver em que a suposta descoberta de Platão tenha sido; isso porque a análise, neste sentido, tem que ter sido utilizada frequentemente em pesquisas anteriores. Não somente Hipócrates de Quios reduz o problema de duplicar o cubo ao de achar duas médias proporcionais, mas é claro que o método de análise, no sentido de redução, tem que ter sido, em algum sentido, usado pelos pitagóricos. Por outro lado, a linguagem de Proclus sugere que ele tinha em mente passagens do *República*, que naturalmente não se referem de nenhuma maneira à análise em matemática; pode portanto ser que a ideia de que Platão descobriu o método de análise é um equívoco. (Heath 1921, p. 291)

Vejamos como um autor moderno, do fim do século XIX, interpreta a análise e a síntese em geometria.

A análise é o método pelo qual uma proposição desconhecida A é reduzida a uma outra proposição desconhecida B , em seguida esta segunda é por sua vez reduzida a C , e assim sucessivamente, até que se chegue a uma proposição conhecida.

A síntese é o método em que se passa de uma proposição conhecida D , a uma outra proposição conhecida C , em seguida desta a uma terceira B , e assim sucessivamente, até chegarmos à proposição A que se quer estudar.

A análise e a síntese têm sentidos opostos: enquanto a primeira começa com o problema estudado para chegar a uma situação conhecida, a segunda começa com uma situação conhecida para chegar ao problema estudado. FGM (1882)

Uma discussão ampla sobre análise e síntese pode ser encontrada na *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, disponível gratuitamente na Internet..

Uma vez expostas estas visões do que constituem a análise e a síntese em matemática, exemplificaremos como os dois métodos são aplicados.

2 O problema de Clavius

Em primeiro lugar, apresentaremos a solução de um problema do livro *Geometria prática* (1604) de Clavius, e que foi posteriormente resolvido analiticamente por Descartes.

Cristóvão Clávio (Christopher Clavius) (Figura 1) nasceu em Bamberg, no que é hoje a Alemanha. Ele é conhecido principalmente por seus trabalhos em astronomia, que fizeram com que seu nome fosse dado a uma cratera lunar (Busard 1981).



Figura 1: Christopher Clavius

Além disso, o que é menos conhecido, ele foi um matemático importante, embora não criativo, pois seus escritos tiveram grande divulgação e repercussão. Entre suas muitas obras matemáticas temos uma edição dos *Elementos* de Euclides (1574), *Álgebra* (1608) e o *Geometria Prática* (1604). Seus livros foram traduzidos para o chinês por um missionário jesuíta que tinha sido aluno de Clavius, Matteo Ricci (1552 – 1610,) e muito influenciaram o desenvolvimento da ciência na China.

Sua monumental edição dos *Elementos* de Euclides se caracteriza por uma discussão cuidadosa da obra, propondo demonstrações alternativas, comparando, apontando deficiências, dando exemplos numéricos para tornar claras as proposições de Euclides.

Em outra obra sobre geometria, o *Geometria Prática* de 1604, Clavius propõe e resolve o seguinte problema: Dado um ponto D fora de um triângulo ABC , trace uma reta que passe por D e divida o triângulo ABC em duas partes iguais (Figura 3).

3 A solução sintética de Clavius

Vejamos, em primeiro lugar, a solução sintética de Clavius.

Considere a Figura 2 e proceda da seguinte maneira

1. Trace uma reta que passa por D , é paralela a CB e intercepta o prolongamento de AC em E .

$$(HG + CG) : CG :: (CE + CH) : CH,$$

do que obtemos, usando semelhança de triângulos, que

$$CH : CG = HE : CH = ED : CI.$$

Agora, usando o item 2,

$$\text{ret} \frac{1}{2} AC, CB)$$

Então usando a proposição VI.23 dos *Elementos*, vemos enfim que

$$\triangle CIH = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

4 A solução analítica de Descartes

Descartes conhecia o problema de Clavius e o resolveu da seguinte maneira, segundo Bos e Reich (Bos und Reich 1990, 206, 207). Para isso, Descartes aplicou seu método analítico, exposto no *La Géométrie*, de 1637, e que constitui o que chamamos hoje de *geometria analítica*.

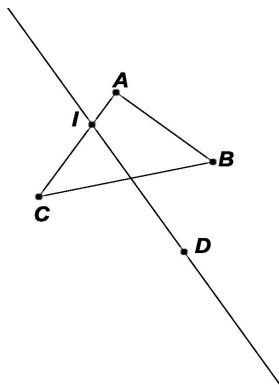


Figura 3: O problema de Clavius

No *La Géométrie*, Descartes escreveu:

Todos os problemas em geometria pode ser facilmente reduzido a tais termos [círculos e linhas retas] não sendo necessário depois se não conhecer o comprimento de algumas linhas retas [segmentos de retas] para construí-los.² (Guinsburg, Romano e Cunha 2010, 460; Barbosa e outros 2017)

²Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes [cercles et lignes droites], qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

Então, como Descartes preconiza no *Géométrie*, proceda da seguinte maneira:

1. Desenhe uma figura.
2. Atribua um nome a cada segmento de reta, conhecido ou desconhecido (por exemplo, x , y , a , b , $\dots$).
3. Escreva simbolicamente todas as relações entre estas quantidades.
4. Trabalhe com estas relações até que você tenha as incógnitas em equações que você consegue resolver.

Vejam como Descartes seguiu seu roteiro para atacar com sucesso o problema de Clavius. Em primeiro lugar, é necessário relembrar um resultado de geometria euclidiana que alguns talvez tenham esquecido. Trata-se da proposição VI.23 dos *Elementos* de Euclides.

4.1 Um resultado dos *Elementos* de Euclides

Proposição VI.23. Se paralelogramos têm os ângulos correspondentes iguais então suas áreas estão entre si como o produto dos lados.

Com efeito. Sejam os paralelogramos $ABCD$ e $EFGH$ em que os ângulos DAB e HEF são iguais (Figura 4).

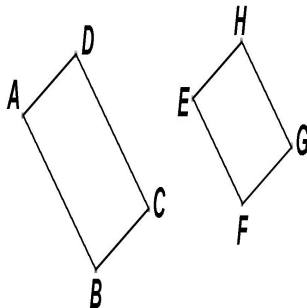


Figura 4: Proposição VI.23

Coloquemos os dois paralelogramos equiangulares $ABCD$ e $HGFE$ dispostos como na Figura 5, de tal maneira que os pontos B e H coincidam e G esteja no prolongamento de AB .

Como os paralelogramos $ABCD$ e $BGSC$ têm a mesma altura, vemos que

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{BGSC}} = \frac{AB}{BG}. \quad (1)$$

Como os paralelogramos $CSGB$ e $BGFE$ têm a mesma altura, vemos que

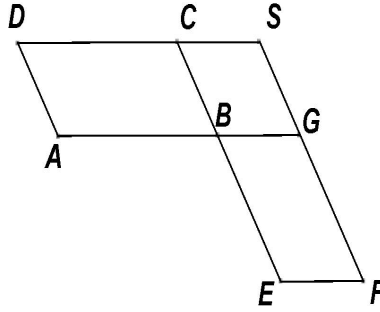


Figura 5: Disposição dos paralelogramos

$$\frac{S_{BGSC}}{S_{EFGH}} = \frac{CB}{BE}. \quad (2)$$

Multiplicando (1) e (2) termo a termo obtemos o que desejávamos:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = \frac{AB}{BG} \times \frac{CB}{BE} \quad (3)$$

Decorre imediatamente dessa proposição que:

Corolário: As áreas de dois triângulos que têm um ângulo correspondente igual estão entre si como os produtos de seus lados.

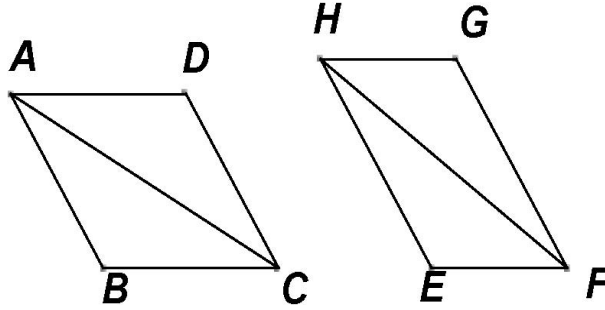


Figura 6: O corolário de VI.23

Com efeito, sejam os triângulos ABC e HEF em que os ângulos ABC e HEF são iguais. Complete os triângulos de modo a obter os paralelogramos $ABCD$ e $HEFG$ (Figura 6) Então, por VI.23, obtemos imediatamente o resultado procurado.

4.2 A solução de Descartes

Clavius procedeu sinteticamente; isto é, adicionou retas à figura e procurou que relações de semelhança existiam nos dois triângulos considerados para mostrar que sua construção realmente permitia resolver o problema. Descartes, não; ele usou seu *método analítico*: supôs que o problema está resolvido, acha relações entre os segmentos de reta envolvidos. No *Géométrie*, o roteiro proposto por Descartes para resolver qualquer problema de geometria é o seguinte:

1. Desenhe uma figura
2. Identifique claramente o que você está tentando resolver
3. atribua um nome a cada quantidade, conhecida ou desconhecida (por exemplo, $x, y, \dots$)
4. Aplique várias técnicas a essas relações até que você tenha as incógnitas em equações que você consegue resolver.³

Podemos agora apresentar a resolução do problema por Descartes.

Suponhamos o problema resolvido. Trace DF paralela a CB (Veja a Figura 7).

Agora, demos nome às retas envolvidas, conhecidas ou desconhecidas, e tentemos achar relações entre elas. Façamos (Figura 7)

$$CA = b, DF = p, CF = q, CB = a, AB = c, CI = z, CK = u.$$

Observe que os dois últimos segmentos, CI e CK , são desconhecidos.

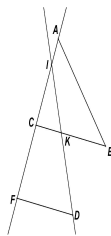


Figura 7: A solução de Descartes

O que Descartes faz pode nos causar surpresa. Hoje, quando pensamos em geometria analítica, automaticamente pensamos nos dois “eixos cartesianos”, em

³ Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, [...] jusques à ce qui se nomme une équation; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles équations qu'on a supposé de lignes qui étaient inconnues.

geral ortogonais e em relação aos quais são dadas as coordenadas (x, y) de um ponto do plano. Descartes não faz isso. Ele escolhe dois segmentos de reta e procura relacionar os outros segmentos de reta com eles. Esses dois segmentos de reta escolhidos são seu sistema referencial, desempenham o mesmo papel que nossos habituais eixos cartesianos. Em nosso caso, Descartes escolheu CI e CK . Observe que, se conhecermos um destes dois segmentos, teremos determinado a reta procurada.

Os triângulos CIK e FDI são semelhantes (Figura 7). Assim,

$$(q + z) : p = z : u \rightarrow pz = u(q + z) \quad (4)$$

Como estamos supondo que a reta DI divide o triângulo ao meio, temos que

$$\text{área de } CAB : \text{área de } CIK = 2 : 1. \quad (5)$$

Mas, os triângulos ABC e ICK têm um ângulo igual. Então, pelo corolário que demonstramos acima, $ab : uz = 2 : 1$, ou seja,

$$uz = \frac{1}{2}ba \quad (6)$$

Agora, temos duas equações, (5) e (6), em z e u . Eliminando u , obtemos

$$z^2 = \frac{\frac{1}{2}ba}{p}z + \frac{\frac{1}{2}ba}{p}.$$

Uma equação quadrática com coeficientes positivos.

Isso pode nos causar surpresa. Descartes procura uma reta que divida o triângulo ABC em duas partes iguais. Ora, sabemos que uma reta é representada por uma equação da forma $ax + by + c = 0$, e não por uma equação quadrática. O que está acontecendo?

Descartes era geômetra. Para ele, a álgebra era uma ferramenta para estudar a geometria, para aplicar seu método analítico. Para nós, dar uma reta ou sua equação não faz diferença. Quando pensamos em uma, pensamos automaticamente na outra. Isso não acontecia com Descartes. Sua prioridade era definitivamente a geometria. Em verdade, embora conhecesse o fato de que uma linha reta é representada por uma equação do primeiro grau em x e y , Descartes nunca a apresenta no *Géométrie*.

Assim, Descartes não apresenta a equação da reta procurada. Ele determina um ponto (I) sobre ela, o que permite traçá-la facilmente.

Para nós, o problema está resolvido. Estamos tão habituados a identificar uma curva com sua equação que pensando em uma delas pensamos automaticamente na outra. Não para Descartes. Como geômetra que era, ele via a álgebra como uma ferramenta para resolver analiticamente problemas de **geometria**. O que realmente interessava era a geometria. Assim, Descartes tem que construir a solução da equação acima (veja Bos 2001). Examinemos como ele procede.

4.3 A construção da solução.

No *Géométrie* (Guinsburg e outros, 2010, pp. 492—496), Descartes mostra como efetuar geometricamente, com segmentos de reta, as quatro operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) e a extração de raízes quadradas. A soma e diferença de segmentos não apresenta problemas. Em seguida, ele define o produto de segmentos da seguinte maneira. Na Figura 8, se $OC = 1$, $OD = a$, $OF = b$, então, usando a semelhança dos triângulos OCB e ODA , $OE = ab$.

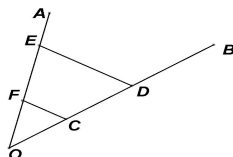


Figura 8: O segmento OE é o produto dos segmentos OD e OF

De maneira análoga, ele define o quociente de segmentos. Na figura 9, se $OC = 1$, $OD = b$, $OE = a$, então, $OF = b/a$.

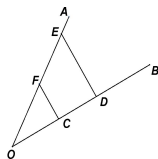


Figura 9: O segmento OF é o quociente dos segmentos OD e OE

Observe que, para definir estas duas operações, Descartes tem que escolher uma unidade. Este procedimento de Descartes foi inovador. Ele rompe definitivamente com a exigência de homogeneidade dos geômetras gregos, que era muito restritiva.

Em seguida, Descartes ataca o problema de como achar a raiz quadrada de um segmento.

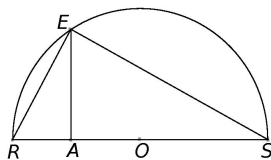


Figura 10: Construção da raiz quadrada de AB

Dado o segmento AS , para achar sua raiz quadrada, $\sqrt{AS}$, Descartes procede

como segue: Prolongue o segmento AS até R , de maneira que $RA = 1$. Seja O o ponto médio de RS . Trace o círculo de centro O e raio OS (Veja a Figura 10). Seja EA a perpendicular ao diâmetro AS , por A . Então, pelas propriedades métricas em um triângulo retângulo, $AE = \sqrt{AS}$.

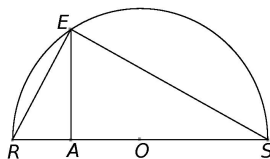


Figura 11: Construção da solução de $x^2 = ax + b$

5 A construção das raízes da equação

A equação a que Descartes chegou é do tipo $z^2 = az + b$. Para resolvê-la (Veja a Figura 11), faça $OC = a/2$, $CD = \sqrt{b}$, $AD = z$. Então,

$$CD^2 = DL \times AD,$$

ou seja

$$b(z - a)z \implies b = z^2 - az \implies z^2 = az + b.$$

Assim, Descartes mostrou como seu método analítico podia resolver este problema. Aliás, no *Géométrie*, ele afirma que o método permite resolver qualquer problema geométrico, já formulado ou que vier a ser formulado.

Embora a solução deste problema por Descartes não seja o maior exemplo do poder de seu método analítico, ela ilustra bem como Descartes procedia. Além disso, ela nos mostra que a “geometria analítica” de nossos livros escolares não é bem o método analítico de Descartes. O que vemos hoje é o fruto de uma sistematização posterior a qual os interessados podem consultar em Boyer (2004). Aliás, se você tentar resolver este problema usando os tradicionais eixos cartesianos ortogonais, verá que o tratamento que expusemos é bem mais simples.

6 Comentários adicionais sobre análise e síntese

Até agora, os exemplos citados para mostrar a diferença entre análise e síntese são geométricos. O que pode levarnos a acreditar que elas só se aplicam à geometria. Isso não é verdade, como mostrado no exemplo a seguir. Considere a função f definida para todos os números reais diferentes de $\frac{1}{2}$ da seguinte maneira:

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

Deseja-se mostrar que para todo $y \neq \frac{1}{2}$ existe $x \neq \frac{1}{2}$ tal que $y = f(x)$.

6.1 Demonstração analítica

Seja $y \neq \frac{1}{2}$. Caso existam x que verificam $y = f(x)$, quais são eles?

Ora

$$y = f(x) \iff y = \frac{x+1}{2x-1} \iff (2x-1)y = x+1.$$

Segue-se então que

$$2xy - x = y + 1 \iff x(2y - 1) = y + 1 \iff x = \frac{y+1}{2y-1},$$

pois $y \neq \frac{1}{2}$.

6.2 Demonstração sintética

Suponha que $y \neq \frac{1}{2}$. Então, como mostrado pela análise que acabamos de efetuar, se existe x tal que $f(x) = y$, ele tem que ser da forma

$$x = \frac{y+1}{2y-1}.$$

Resta-nos verificar que $x \neq \frac{1}{2}$ e que $f(x) = y$.

Primeiramente vejamos se $x = \frac{1}{2}$. Procederemos por absurdo, supondo que $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{y+1}{2y-1} = \frac{1}{2} \iff 2y+2 = 2y \iff 2 = -1,$$

o que é absurdo. Portanto, $x \neq \frac{1}{2}$.

Calculemos o valor de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-1} = \frac{\frac{y+1}{2y-1} + 1}{2\frac{y+1}{2y-1} - 1} = \frac{\frac{2y}{2y-1}}{\frac{3}{2y-1}}.$$

Assim, para todo $y \neq \frac{1}{2}$, existe $x \neq \frac{1}{2}$ tal que $y = f(x)$.

6.3 Mais um exemplo

Comparemos os dois métodos demonstrando a mesma proposição aplicando cada um deles.

Considere a proposição

A distância MP de um ponto qualquer M de uma circunferência a uma corda dada AB é a média proporcional entre as distâncias MG , ME do mesmo ponto M às tangentes AC , BC traçadas pelas extremidades da corda dada AB .

6.3.1 Resolução analítica

Consideremos a Figura 12

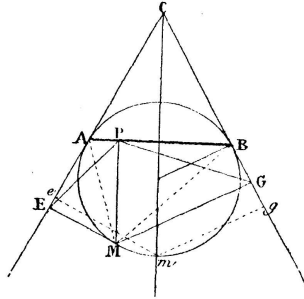


Figura 12: Resolução analítica

Desejamos provar que

$$MP^2 = ME \cdot MG$$

Supondo isso verdadeiro, temos que

$$\frac{ME}{MP} = \frac{MP}{MG} \quad (7)$$

Mas os ângulos EMP , PMG são iguais, pois são respectivamente iguais aos ângulos iguais eMC , gmC , portanto, aceitando (7), vemos que os triângulos

EMP , PMG são semelhantes pois têm um ângulo compreendido entre dois lados homólogos proporcionais.

Então, como consequência, $\angle MPE = \angle MGP$. De maneira análoga, $\angle MGP = \angle MBP$.

Mas os ângulos MAE , MBP medem ambos a metade do arco AM , logo são iguais e o mesmo acontece com os ângulos MPE , MGP .

Assim, o teorema está demonstrado e podemos escrever

$$MP^2 = ME \cdot MG.$$

6.3.2 Resolução sintética

O quadrilátero $APME$ é inscritível porque dois de seus ângulos opostos são iguais. Assim, $\angle MPE = \angle MAE$ pois estão inscritos no mesmo segmento. Análogamente, $\angle MGP = \angle MBP$. Além disso, os ângulos inscritos MAE e MBP são iguais, e portanto

$$\angle MPE = \angle MGP.$$

Como os ângulos EMP e GMP são iguais pois são respectivamente iguais aos ângulos em m , resulta que os triângulos MPE e MPG são equiangulares, e portanto semelhantes:

$$\frac{ME}{MP} = \frac{MP}{MG} \implies MP^2 = ME \cdot MG.$$

Referências

- Barbosa, Bruna F., Silva, Clediane M. da, Brant, Filipe B., Sapunaru, Raquel A. . 2017. *A Geometria de René Descartes*. 2^a ed. São Paulo: Livraria da Física.
- D’Alambert, e outros. 1785. *Encyclopédie Méthodique. Mathématiques II*. Paris: Panckouche.
- Bos, Henk J. M. und Reich, Karin. 1990. Der doppelte Aufakt zur frühneuzeitlichen Algebra: Viète und Descartes. In Scholz E. (Hersg.) *Geschichte der Algebra. Eine Einführung*. Mannheim: Wissenschaftsverlag, pp. 184-234.
- Bos, Henk J. M.. 2001. *Redefining Geometrical Exactness. Descartes’ Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer.
- Carl B. Boyer. 2004. *History of Analytic Geometry*. New York: Dover.
- Busard, H. L. L.. Clavius, Christoph. 1981. Gillispie, Charles Coulton (ed.). *Dictionary of Scientific Biography*, III. New York: Charles Scribner’s Sons, pp. 311-312.
- Clavius, Christopher. 1604. *Geometria Practica*. Rome.
- Descartes, René. 1886. *La Géométrie de René Descartes*. Nouvelle Édition. Paris: A. Hermann.
- Fauvel, John and Grey, Jeremy. 1987. *The History of Mathematics – a Reader*. London: The MacMillan Press.

- Guinsburg, J; Romano, Roberto e Cunha, Newton (orgs.). 2010. *Descartes: Obras Escolhidas*. São Paulo: Perspectiva.
- Heath, Thomas Little. *A History of Greek Mathematics*, 1. New York: Dover.
- FGM (Frère Marie Gabriel). 1882. *Exercices de Géométrie, comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues*. Paris: Poussielgue Frères; Tours: Alfred Mame et Fils.
- Otte, Michael and Marco Panza. 1997. *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*. Dordrecht: Kluwer.
- Pappus. 1923. *La Colecion Mathématique*, vol 1. Avec une Introduction et des Notes. Paul Veer Eecke. Paris: Desclée de Brower.
- Viète, François. 2006. *The Analytic Art*. T. Richard Witmer. New York: Dover.