INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
PROGRAMA PROFMAT
GRUPO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

# MÓDULO 2

# AL-KHWARIZMI

MÓDULO 2
**AL-KHWARIZMI**

João Bosco Pitombeira de Carvalho
Fernando Antonio de Araujo Carneiro

GRUPO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA
Programa PROFMAT
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

## 1 Introdução

Até o século XIX, a álgebra era a "arte de resolver equações". Se escolhermos ao acaso uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental veremos que o que se ensina de álgebra no referido nível de ensino consiste majoritariamente na resolução de equaçõoes ou sistemas de equações. Inicialmente equações do primeiro grau e posteriormente do segundo. O caminho trilhado para a constituição desse campo da matemática foi longo e contou com as contribuições de várias culturas: hindus, chineses, árabes e matemáticos europeus. Veremos como um matemático do Islã contribuiu de maneira essencial para a constituição de um campo novo da matemática, exatamente a álgebra.

## 2 al-Khwarizmi

Entre os séculos VIII e XII, a cidade de Bagdá era um dos maiores centros científicos do mundo e seus matemáticos tinham conhecimento tanto das obras matemáticas gregas quanto das orientais. A partir do século IX, esta cultura evoluiu para uma produção original que tinha a álgebra como um de seus pontos fortes, no sentido que exporemos adiante. Havia grande influência das obras clássicas, o que não impediu que uma Matemática de tipo novo fosse desenvolvida. O matemático mais ilustre desse século foi al-Khwarizmi, que viveu, aproximadamente, entre 790 e 850. Daremos alguns exemplos para mostrar em que consiste a álgebra praticada por ele e como os procedimentos geométricos eram usados para explicar suas técnicas.

Pouco se conhece da vida de al-Khwarizmi (aprox. 780 – aprox. 850) e é incerto onde nasceu. Seu nome era em verdade Muhammad ben Musa. O nome pelo qual ele é universalmente conhecido indica que ele ou sua família provinham da região do Khwarezm na Ásia Central, próoximo ao Mar de Aral. Assim, ele é mundialmente conhecido por por um topônimo.

Al-khwarizmi foi um dos sábios que pertenceram à “Casa da Sabedoria”, de Bagdá, no reinado do califa al-Mamum (813-833). O seu célebre livro *Al Kitab al-Muhtasar fi Hisab al-Jabr wa al-Muqabala*, cuja tradução ao pé da letra é *O Livro Compendioso sobre o Cálculo de Restauração e Comparação*, foi traduzido para o latim como *Liber Algebræ et Almucabala*. Da deturpação do termo al-jabr e da extensão dessa palavra à resolução das equações surgiu, no século XIV, a palavra álgebra.

Figura 1: Página do livro de al-Khwarizmi

O livro de al-Khwarizmi, encomendado pelo Califa al-Manun, era destinado ao público em geral. No início de seu livro, al-Khwarizmi afirma que “as pessoas em geral querem um número, quando estão calculando [...]”, ou seja, a solução de uma equação. Assim, ele escreveu seu livro para ensinar as pessoas a resolverem equações.

Embora o objetivo de al-Khwarizmi fosse escrever um manual essencialmente prático, como ele tinha sido influenciado pela matemática grega na Casa da Sabedoria, sentiu-se obrigado a apresentar provas geométricas de seus procedimentos algébricos. Mas suas provas geométricas não eram gregas. Elas remontam aos babilônios, seguem o modelo das justificativas geométricas dos babilônios. Como seus predecessores orientais, al-Khwarizmi deu muitos exemplos e problemas, mas a influência grega se revela em sua classificação sistemática dos problemas, e também nas explicaçoes muito detalhadas de seus métodos.

Al-khwarizmi introduz imediatamente termos técnicos para designar as quantidades com que lidará: em primeiro lugar *mal* (riqueza) para o quadrado (da incógnita), *jidhr* (raiz) para a incógnita e *adad* (número simples) para a constante em uma equação. Autores posteriores substituiram *jidhr* por *shay* (coisa), para enfatizar que estavam lidando com uma incógnita.

O importante é que, embora a justificativa apresentada por al-Khwarizmi para métodos de resolução fosse geométrica, os termos técnicos definidos por ele se referem a quantidades numéricas. Assim, temos em verdade algoritmos numéricos de resolução de equações.

A nova disciplina, criada por al-Khwarizmi foi constituída sem nenhum simbolismo, mas somente com termos da linguagem natural. No entanto, era bem compreendido que os termos combinados 'cosa' – a 'coisa' – e seu quadrado eram concebidos sem nenhum conteúdo específico e em verdade funcionavam como símbolos

Depois de mostrar como efetuar as quatro operações sobre expressões contendo quantidades desconhecidas, al-Khwarizmi passa à enumeração dos seis tipos possíveis de problemas que envolvem os quadrados, as raízes e os números:[1]

1. quadrados iguais a raízes ($ax^2 = bx$)
2. quadrados iguais a um número ($ax^2 = c$)
3. raízes iguais a um número ($bx = c$)
4. quadrados e raízes iguais a um número ($ax^2 + bx = c$)
5. quadrados e um número iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$)
6. raízes e um número iguais a quadrados ($bx + c = ax^2$)

Cada caso era tratado inicialmente com exemplos. Para cada um dos tipos enumerados, al-Khwarizmi apresenta procedimentos para resolução, justificados geometricamente.

[1] A necessidade de considerar estes casos separadamente é devida ao fato de, então, só se trabalhar com números positivos.

Os três primeiros casos não apresentam problemas. Veremos a seguir como ele ataca os três últimos.

Em primeiro lugar, os três tipos podem ser reduzidos, respectivamente, às formas $x^2 + bx = c$, $x^2 + c = bx$ e $bx + c = x^2$.

Vejamos então como al-Khwarizmi resolve estes tipos de equações.

Tipo $x^2 + bx = c$.

O procedimento de resolução é explicado usando o exemplo $x^2 + 10x = 39$, como segue

> *Por exemplo*: *um quadrado e dez raízes do mesmo equivalem a* 39 *denares*; *ou seja*, *qual deve ser o quadrado que*, *quando aumentado de dez de suas próprias raízes*, *é equivalente a trinta e nove*? *A solução é*: *tome a metade do número de raízes*, *o que neste exemplo é igual a cinco. Isso você multiplica por ele próprio*; *o produto é vinte e cinco. Adicione isso a trinta e nove*; *a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso*, *que é oito e subtraia dela a metade do número de raízes*, *que é cinco. O resultado é três. Isso é a raiz do quadrado que você procurava*; *o quadrado é nove.* ([8], pp. 13–18)

Isso é equivalente a usar a fórmula bem conhecida

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2 + 4c} - b}{2}.$$

Assim, temos enfim $4 = (x - 5)^2$, e portanto $x = 7$.

Em seguida, ele afirma: "A figura para explicar isto é um quadrado cujos lados são desconhecidos". Deve-se construir um quadrado de diagonal $AB$ que representa o *Mal*, ou o quadrado da raiz procurada, e dois retângulos iguais $G$ e $D$ cujos lados são a raiz e 5, metade de 10 (Veja a Figura 2). A figura obtida é um *gnomon* de área 39. O resultado utilizado é equivalente à Proposição II.4 dos *Elementos* de Euclides. Completando esta figura com um quadrado de lado 5 (e área 25), obtemos um quadrado de área $64 = (39 + 25)$. O lado $AH$ deste quadrado mede 8. Daí obtém-se que a raiz procurada é $3 = (8 - 5)$.

Essa construção geométrica reproduz exatamente o a resolução de al-Khwarizmi e demonstra a necessidade de completar o quadrado durante a resolução algébrica. Fica claro que ele estabeleceu uma analogia entre a geometria e a álgebra ao identificar o lado do quadrado geométrico à

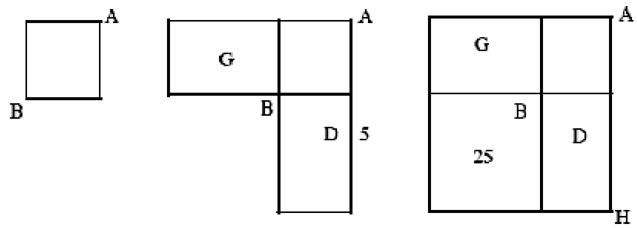



Figura 2: Solução de $x^2 + bx = c$

raiz do quadrado algébrico. A justificativa geométrica apresentada por al-Khwarizmi não serve apenas para garantir a validade do algoritmo, ela nos faz compreender sua causa: a necessidade de completar o quadrado. Esse papel para a argumentação geométrica, usado pelos árabes, era totalmente novo.

Tipo $x^2 + c = bx$.

Este tipo é discutido usando o exemplo $x^2 + 21 = 10x$.

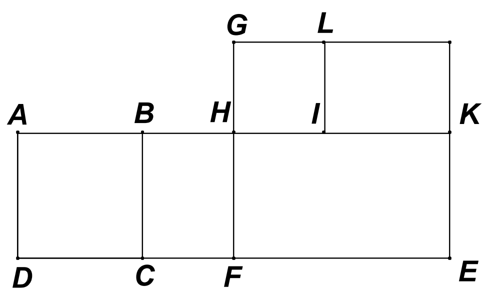



Figura 3: Solução de $x^2 + c = bx$.

Na Figura 3 quadrados e retângulo são identificados por suas diagonais. Sejam $AC = x^2$, $DE = b$, $DF(> x) = FE = \frac{b}{2}$. Decorre então que $BE = c$. Seja o quadrado $EG = FE^2 = [= \left(\frac{b}{2}\right)^2]$. Segue-se que $BH = [\frac{p}{2} - x] = HG$.

Construa o quadrado $GI$, ou seja, com $G$ e $I$ vértices opostos. Assim, como $IK = HF$ e $BH = LI$, temos que $S_{BF} = S_{LK}$, respectivamente as áreas de $BF$ e $LK$. Então,

$$S_{GE} - S_{BE} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - q = S_{GI} = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2.$$

Assim,

$$HI = \frac{b}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

e

$$DC = x = DF - CF = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Tipo $bx + c = x^2$.

As equações desse tipo são exemplificadas com $3x + 4 = x^2$, resolvida nas páginas 19–21 e a solução é justificada pela seguinte ilustração (Figura 4).

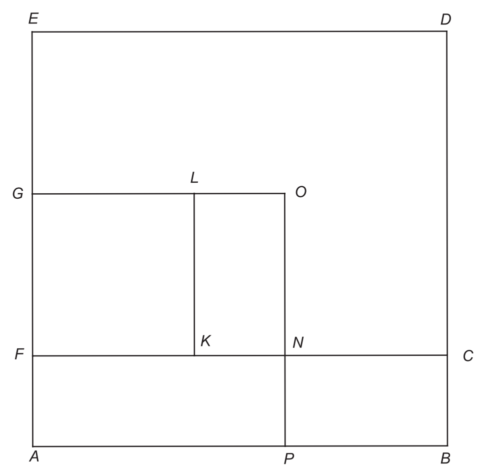



Figura 4: Solução de $3x + 4 = x^2$.

Seja $AB = x$ e construa o quadrado $ABDE$. Marque $F$, sobre $AE$, de maneira que $EF = b$. Como $x^2 = bx + c$, vemos que a área do retângulo $ABCF$ é igual a $c$.

Seja $G$ o ponto médio de $EF$. Então, por construção, $AG$ mede $s = x - \frac{b}{2}$ e $S_{FKLG}$, a área de $FKLG$, é igual a $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Construa os quadrados $FKLG$ e $APOG$. Então, a congruência dos retângulos $KNOL$ e $PBNC$ acarreta que

$$\begin{aligned} S_{APOG} &= s^2 = S_{FKLG} + S_{APNF} + S_{KNOL} = \\ &= S_{FKLG} + S_{APNF} + S_{PBNC} = \\ &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c. \end{aligned}$$

Assim,

$$x = s + \frac{b}{2} = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}.$$

Vemos que a solução apresentada por al-Khwarizmi corresponde exatamente à raiz positiva da equação $x^2 + 10x = 39$. O algoritmo de resolução é uma sequência de operações equivalentes à formula de resolução de equação do segundo grau usada atualmente, o que mostra a generalidade da solução apresentada, mesmo que tenha sido exposta para um exemplo particular.

Os tipos de equações discutidos por al-Khwarizmi serão tratados por matemáticos árabes posteriores, até Baha al-Din (1547–1622) exatamente desta maneira ou de maneiras semelhantes. Por vezes os mesmos exemplos numéricos são usados.

Apesar de a linguagem utilizada por al-Khwarizmi usar somente palavras, ele emprega um vocabulário padrão para os objetos que aparecem no problema. Ao estudar problemas que atualmente correspondem a equações do segundo grau, ele introduziu os termos necessários para o seu entendimento, principalmente os três modos sob os quais o número aparecia no cálculo algébrico: a raiz, o quadrado e o número simples. Na sua notação, o quadrado era um conceito algébrico designado pela palavra *Mal*, que significa *possessão*, ou "tesouro". Esta palavra era empregada para designar o quadrado da quantidade desconhecida, e não é o quadrado geométrico (*murabba'a*).

Os indianos já utilizavam símbolos para as incógnitas e para as operações. O persa al-Khwarizmi forneceu algoritmos de resolução justificados por procedimentos geométricos. Os métodos enunciados por Bháskara e al-Khwarizmi permitem reduzir uma equação do segundo grau a uma equação do tipo $ax^2 + bx = c$, mas ainda não havia símbolos algébricos para expressar coeficientes genéricos da equação, no caso, os coeficientes $a$, $b$ e $c$. Se traduzirmos o método usado por eles na linguagem algébrica atual e o aplicarmos a uma equação geral do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, obteremos o equivalente da fórmula para resolução de equações do segundo grau. Isto significa que havia um método geral para resolução de equações, ainda que expresso por palavras.

Veremos a seguir as contribuições de Abu Kamil para a solução das equações do $2^o$ grau.

## 3 A contribuição de Abu Kamil

Pouco sabemos da vida de Abu Kamil Shuja ibn Aslam ibn Muhammad Ibn Shuja (Veja [5]), que viveu entre 850 e 930, aproximadamente. Como nasceu no Egito, é frequentemente chamado de "o calculador egípcio". Ele escreveu um texto chamado de *Sobre o Pentágono e o Decágono*, que trata de equações do quarto grau e de equações com coeficientes irracionais.

Vejamos como Abu Kamil resolve equações do 2º grau.

A geometria usada por al-Khwarizmi é bem elementar, usando essencialmente as técnicas de recortar e colar dos babilônios, mas apresentando-as sistematicamente, o que foi aprendido com os gregos. Diferentemente, Abu Kamil utiliza dois teoremas bem sofisticados dos *Elementos* de Euclides, as proposições II.5 e II.6 cujos enunciados transcrevemos aqui para conveniência do leitor.

Proposição II.5 – – Se uma reta for dividida em partes iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais juntamente com o quadrado sobre a reta entre os pontos de divisão é igual ao quadrado sobre metade da reta.

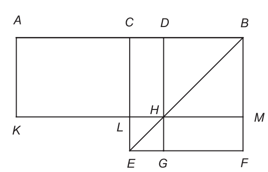



Figura 5: Proposição II.5

Suponha que o segmento $AB$ está dividido em duas partes iguais pelo ponto $C$ e em duas partes desiguais pelo ponto $D$ (Figura 5). Então, o retângulo de lados $AD$ e $DB$, juntamente com o quadrado sobre $CD$, será igual ao quadrado sobre $CB$. Ou seja, se $\mathrm{RET}_{AD,DB}$, $\mathrm{QUAD}_{CD}$ e $\mathrm{QUAD}_{CB}$ designarem, respectivamente, o retângulo com lados $AD$ e $DB$, o quadrado de lado $CD$ e o o quadrado de lado $CD$, então

$$\mathrm{RET}_{AD,DB} + \mathrm{QUAD}_{CD} = \mathrm{QUAD}_{CB}.$$

Proposição II.6 – Se uma linha reta é dividida em duas partes iguais e se uma outra linha reta lhe é adicionada, prolongando-a, o retângulo determinado pela linha reta e pela reta adicionada é igual, se lhe for adicionado o quadrado sobre a metade da reta, ao quadrado sobre a reta formada pela metade e pela reta adicionada.

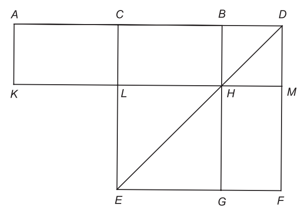



Figura 6: Proposição II.6

Ou seja, usando a notação que introduzimos na proposição II.5, temos que

$$\mathrm{RET}_{AD,\,DB} + \mathrm{QUAD}_{CB} = \mathrm{QUAD}_{CD}.$$

Podemos agora descrever o procedimento de Abu-Kamil

Caso $x^2 + px = q$.

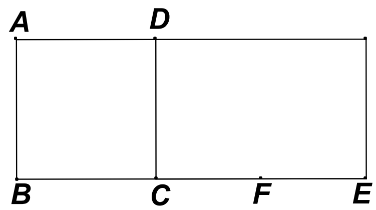



Figura 7: Solução de $x^2 + px = q$

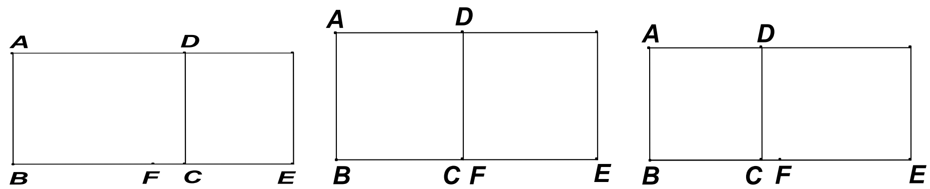
Sejam $ABCD = x^2$ e $CE = p$. Assim, $S_{AE} = x^2 + px = q$, em que $A$ é o retângulo de vértices opostos $A$ e $E$. Seja $F$ o ponto médio de $CE$. Então, pela proposição II.6,

$$BE \times BC + CF^2 = BF^2.$$

Como $BE \times BC = BE \times AB = q$ e $CF^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, segue-se que $BF = x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$, e portanto

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}.$$

Caso $x^2 + q = px$.




(a) $BF < BC$ (b) $BF = BC$ (c) $BF > BC$

Figura 8: Os três casos de $x^2 + q = px$

Há três situações a estudar (Figura 8):

Como só são consideradas raízes reais, não podemos ter $q \leq \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Sejam $ABCD = x^2$ e $BE = p$. Então, $S_{DE} = px - x^2 = q$. Há três possibilidades para $F$, que é o ponto médio de $BE$.

(a) O ponto $F$ pertence a $BC$ (ou seja, $x > \frac{p}{P}2$). A proposição II.5 garante que

$$BC \times CE = FC^2 = BF^2.$$

Como $BC \times CE = DC \times CE = q$ e $BF^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, vemos que $FC = x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, e portanto

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

(b) O ponto $F$ coincide com o ponto $C$, ou seja, $BC = BF$ e portanto $x = \frac{p}{2} = \sqrt{q}$.

(c) O ponto $F$ pertence a $CE$ (ou seja $\frac{p}{2} > x$).

A proposição II.5 acarreta que

$$BC \times CE + CF^2 = BF^2.$$

Como $BC \times CE = DC \times CE = q$, e $BF^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, segue-se que

$$CF = \frac{p}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

e assim

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Caso $x^2 = px + q$.

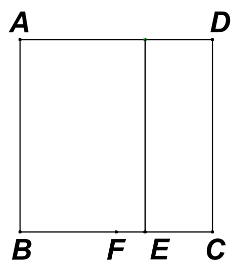



Figura 9: Solução de $x^2 = px + q$

Sejam $ABCD = x^2$ e $BE = p$. Segue-se que $DE = x^2 - px = q$. Seja $F$ o ponto médio de $BE$. Então, usando a proposição II.6, obtemos

$$BC \times CE + FE^2 = FC^2.$$

Como $BC \times CE = CD \times CE = q$ e $FE^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, obemos

$$FC = x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2},$$

e portanto

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2}.$$

Além das contribuições de al-Khwarizmi citemos também os trabalhos de Tabit ibn Qurra, que viveu de 836 a 901 e foi um grande cientista árabe, com contribuições importantes em vários campos. Ele escreveu um pequeno tratado sobre a verificação de problemas de álgebra por demonstrações geométricas, em que mostra como resolver as equações $x^2 + mx = n$ e $x^2 = ax + b$.

O matemático al-Karagi[2] fornece, além das provas geométricas, uma solução do tipo de Diofanto para cada caso apresentado. Ele procura sempre completar os quadrados. No caso de $x^2 + 10x = 39$, isso não apresenta problemas. No entanto, ao tratar de $x^2 + 21 = 10x$, como os árabes não trabalhavam com números negativos, é necessário proceder como abaixo:

[2]Matemático árabe que viveu do fim do século X ao princípio do século XI em Bagdá.

$$
\begin{aligned}
(x+21)+25 &= 10x+25 \\
(x^2+21+25)-21 &= (10x+25)-21 \\
x^2+25 &= 10x+4 \\
x^2+25-10x &= 4
\end{aligned}
$$

Assim, temos que

$$
\begin{gathered}
(x-5)^2 = 4 \\
x-5=2 \Longrightarrow x=7 \\
5-x=2 \Longrightarrow x=3
\end{gathered}
$$

## 4 Considerações finais

Esta rápida e incompleta exposição da álgebra dos países muçulmanos está muito longe de fazer justiça ao florescimento da matemática nesses países. Até algumas décadas, a historiografia tradicional da matemática, então nitidamente eurocêntrica, julgava que o único papel dos matemáticos das regiões de cultura islâmica tinha sido preservar a matemática grega, que voltaria a desenvolver-se uma vez trazida de volta para a Europa Ocidental. Esta visão está totalmente errada. Em verdade, um dos grandes capítulos da história da matemática é obra desses matemáticos, que desenvolveram uma matemática de alto nível, antecipando muitas vezes descobertas posteriores dos europeus.

Segundo Katz ([3], p. 519), uma das principais característas da matemática dos dos paises muçulmanos é a conexão da prática com a teoria, muito pouco presente na matemática dos gregos.

## 5 Comentários sobre as referências bibliográficas

Duas referênciaa introdutórias, facilmente encontradas, são os livros de Tatiana Roque [6] e [7]. o leitor poderá consultar, com proveito, os livros de Boyer [1] e Howard Eves [2], que se encontram na maioria das bibliotecas universitárias. O livro de Victor Katz [3] permite um estudo mais profundo da matemática dos países do Islã. A obra de Victor Katz e de Karen Hunger Parshall [4] é uma boa referência para o desenvolvimento da álgebra.

Quem desejar se aprofundar na obra de al-Khwarizmi poderá ler uma tradução de seu livro por Frederic Rosen [8] e quem se interessar por sua vida e obra poderá consultar o verbete escrito por G. J. Toomer para o *Dictionary of Scientific Biography* [9].

**Atividade 1.** Considere a equação

"Um *Mal* e vinte e um igualam dez *Jidhr*" ($x^2 + 21 = 10x$). Use o seguinte algoritmo: tomamos a metade de dez, que é 5, e multiplicamos 5 por 5, obtendo 25. Subtraímos, em seguida, 21 de 25 e obtemos 4 cuja raiz é 2. Subtraímos, então, 2 de 5, encontrando a primeira raiz que é 3. Depois, somamos 2 a 5 para obter a segunda raiz que é 7.

Use este exemplo para deduzir um método geral para o quinto caso. Enuncie este método algebricamente e justifique-o, em seguida, geometricamente.

**Atividade 2.** Escreva os algoritmos para os casos quatro e cinco dos tipos estudados por al-Khwarizmi, usando símbolos para representar incógnitas e coeficientes e obtenha a nossa fórmula para resolução de equações do segundo grau.

**Atividade 3.** Resolva, usando o método de al-Khwarizmi, a equação $x^2 + 5x = 15$, justificando geometricamente a resolução.

**Atividade 4.** Resolva o seguinte problema propostos por al-Khwarizmi: Divida dez em duas partes, e divida a primeira pela segunda e a segunda pela primeira. Se a soma dos quocientes é igual a 2, ache as partes.

**Atividade 5.** Resolva o seguinte problema proposto por Abu Kamil: Suponha que 10 é dividido em duas partes e que o produto de uma delas por ela mesma é igual ao produto da outra pela raiz quadrada de 10. Ache as duas partes.

## Referências


[1] BOYER, Carl B. and Uta C. MERZBACH. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

[2] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2011.

[3] KATZ, Victor. *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A Sourcebook*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2007.

[4] KATZ, Victor and Karen Hunger Parshall. *Taming the Unknown*. A History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2014.

[5] LEVEY, Martin. Abu-Kamil. In Charles Coulston Gillispie (ed.). *Dictionary of Scientific Biography*, I, pp. 3–32. New York: Charles Scribner's Sons, 1981.

[6] ROQUE, Tatiana e CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. *Tópicos de História da Matemática*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[7] ROQUE, Tatiana. *História da Matemática: uma Visão Crítica, Desfazendo Lendas e Mitos*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[8] ROSEN. Frederic. *The Algebra of Mohhamed Ben Musa. Edited and Translated by Frederic Rosen*. London: Oriental Translation Fund, 1831.

[9] TOOMER, G. J.. Al Khwarizmi. In Charles Coulston Gillispie (ed.). *Dictionary of Scientific Biography*, VII, pp. 358–365. New York: Charles Scribner's Sons, 1981.