UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA PROFMAT

GRUPO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

TANGENTES NO SÉCULO XVII

Setembro de 2022

Grupo de História da Matemática

Jeanne D. B. de Barros
Fernando Antônio de Araújo Carneiro
João Bosco Pitombeira de Carvalho
Cláudia Ferreira R. Concordido
Marcus Vinicius Tovar Costa
Guido Gerson Espiritu Ledesma
Patrícia Nunes da Silva

In Memoriam

Rogério Luiz Quintino de Oliveira Junior

TANGENTES NO SÉCULO XVII

João Bosco Pitombeira de Carvalho
Programa PROFMAT
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Sumário

Prefácio

Este texto resultou das reuniões semanais do Grupo de História da Matemática do Programa PROFMAT do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Durante a leitura do capítulo "Techniques of the Calculus", 1630 –1660, escrito por Kirsti Møeller Pedersen para o livro *From the Calculus to Set Theory* 1630 – 1910, de Grattan-Guinnes [10]. Rapidamente tornou-se claro que o texto, por sua concisão, precisava ser detalhado com material paralelo. Disso, resultou esta publicação.

O estudo das tangentes a curvas no século XVII faz parte da grande virada matemática daquela época, como pode ser visto no livro de Evelyne Barbin [2], e a literatura dedicada especificamente ao tema é vasta e profunda, sendo impossível abrangê-la em um seminário. Já em 1919 Aníbal Scipião Gomes de Carvalho dedicou-lhe alentada monografia [6].

Seria impossível estudar as contribuições de todos os matemáticos da época que se ocuparam em achar métodos, mais ou menos gerais, para determinar tangentes a curvas. Um diligente aluno de doutoramento, com vários anos para trabalhar, e com acesso a arquivos e bibliotecas em muitos países e várias linguas, conseguiria um quadro mais ou menos completo, que logo seria tornado obsoleto por novos resultados de pesquisa. O assunto é como uma fractal, cada aproximação desvenda novos horizontes.

Particularmente úteis foram Baron [3] e Boyer [5], pelas pistas que deram para trabalhos originais. O site archives.org muito auxiliou na sua procura. Optamos por não citar, nas referências, as obras originais consultadas, que podem ser identificadas por exemplo em Boyer e Pedersen.

Os matemáticos do século XVII testavam novos métodos que lhes permitissem atacar e resolver problemas legados pelos "antigos" ou novos. Assim, vemos que eles frequentemente abordam questões já estudadas anteriormente, cujas soluções já eram conhecidas, a fim de testar o poder dos novos métodos. Além disso, observa-se, por exemplo no caso de Fermat, a tentativa de aplicar a curvas transcendentes métodos originalmente aplica-dos a curvas algébricas. Nesse sentido, é exemplar o caso da cicloide, muito estudada, e que deu origem a acerbas controvérsias de prioridade ou sobre a superioridade de um método sobre outros. Outra curva frequentemente considerada pelos matemáticos daquela época foi a quadratriz.

Queremos destacar a anásise detalhada, feita por Patrícia Nunes da Silva, para exposição nos seminários do Grupo de História da Matemática, de como Roberval achou a tangente à quadratriz, tema de que Pedersen foge como o diabo da cruz. O raciocínio de Roberval é extremamente obscuro, e exige perspicácia para traduzí-lo em linguagem compreensivel.

Patrícia Nunes da Silva e João Bosco Pitombeira de Carvalho agradecem aos membros do Grupo de História da Matemática, particularmente Fernando Antônio de Araújo Carneiro pela leitura cuidadosa das várias versões do texto e à FAPERJ, que tornou este trabalho possível.

Capítulo 1

Roberval

Algumas das tentativas bem sucedidas no século XVII para atacar problemas de tangentes foram feitas por Gilles Personne de Roberval, entre 1630 e 1634. Como ele tinha que garantir sua posição no *Collège Royal* em Paris,[1] guardava ciosamente muitos de seus resultados matemáticos, o que originou inúmeras disputas sobre prioridade, particularmente com Descartes, que o detestava, no que era retribuído à altura.

1.1 O método das velocidades instantâneas

Gilles Personne de Roberval (1602-1675) adotou uma perspectiva dinâmica no estudo das curvas e de suas tangentes. Ele considerava que uma curva é gerada pelo deslocamento de um ponto e que, em cada ponto da curva, a tangente é a direção da velocidade instantânea do ponto móvel (Skinner, [16]). Caso o vetor velocidade em um ponto possa ser decomposto em dois outros vetores velocidade mais simples e que possam ser determinados, então o problema está resolvido. Com este método, Roberval conseguiu determinar, corretamente, as tangentes a várias curvas estudas em sua época. Ao tratar das cônicas, ele cometeu enganos, pois pensava que os movimentos geradores se afastavam dos focos ou do foco e diretriz, e usou incorretamente a regra do paralelogramo. Ele foi bem sucedido no caso da espiral, da cicloide e da quadratriz, mas não conseguiu formular uma maneira geral que permitisse atacar com sucesso qualquer curva.

Mostremos primeiramente como ele atacou o caso da espiral de Arquimedes.

[1] O *Collège Royal* é uma instituição de ensino e pesquisa francesa muito importante, fundada em 1530 pelo rei François I.

1.1.1 Roberval e a tangente à espiral de Arquimedes

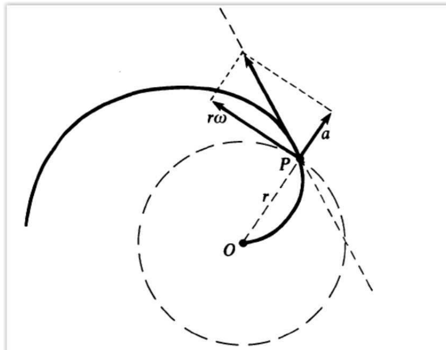

Figura 1.1: Roberval e a tangente à espiral

Considere a espiral da Figura 2.1 e cuja equação polar é $r = at$, $\theta = wt$. O movimento de um ponto $P(ar, wt)$ sobre a curva pode ser decomposto em uma componente radial (se afastando da origem) e uma componente angular. A fim de achar a tangente à espiral no ponto P, tomemos o vetor velocidade radial, de módulo a e o vetor velocidade angular, de módulo rw, tangente ao círculo de raio r e que passa por P. A soma desses dois vetores é o vetor velocidade instantânea no ponto P, na direção da reta tangente à espiral.

1.1.2 Roberbal e a tangente à cicloide

A cicloide foi uma curva muito debatida e estudada no século XVII, época em que ela era denominada *trocoide* e deu origem a discussões acaloradas. Pelo que sabemos, o primeiro matemático a mencioná-la foi Charles de Bouvelles, em 1501, em suas tentativas para fazer a quadratura do círculo ([13]).

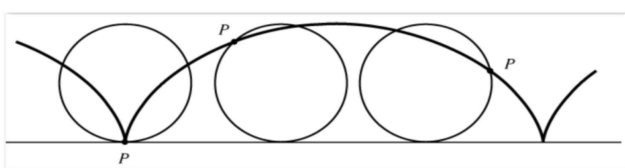

Figura 1.2: A cicloide

A cicloide é a curva gerada por um ponto de uma circunferência que gira, sem deslizar, sobre uma reta, chamada de *diretriz*. Curvas de tipos semelhantes podem ser obtidas com diretrizes diferentes. O jogo spirograph gera cicloides fascinantes, e é possível parametrizá-las todas.

Em linguagem moderna, a cicloide pode ser descrita como segue. Seja um círculo de raio r que, quando $\theta = 0$, é tangente ao eixo dos x, na origem (Figura 1.3). O círculo rola ao longo do eixo com velocidade angular constante de 1 radiano/seg. A cicloide é a trajetória do ponto P sobre o círculo inicialmente na origem e cujas coordendas, no instante θ são

$$\begin{cases} x = r(t - \operatorname{sen}\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

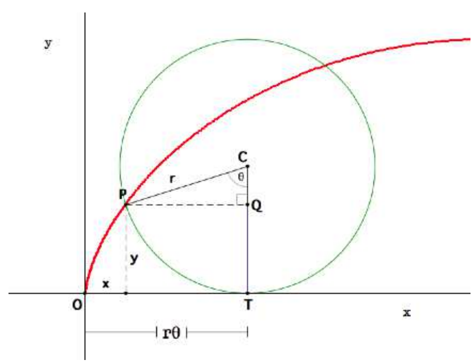

Figura 1.3: A cicloide

Roberval percebeu que o movimento de um ponto P da curva é a composição de uma translação com movimento retilíneo uniforme de velocidade 1, ao longo do eixo dos x, e de um movimento circular uniforme com velocidade angular igual a 1, situado, no instante θ, em $(r\theta, r)$. Os vetores velocidade instantânea correspondentes são,

$$\begin{cases} \overline{u} = (r, 0) \\ \overline{w} = (-r\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \end{cases}$$

A soma desses dois vetores é

$$\overline{v} = (r(1 - \cos, \theta), r\operatorname{sen}\theta),$$

a tangente à cicloide no ponto P.

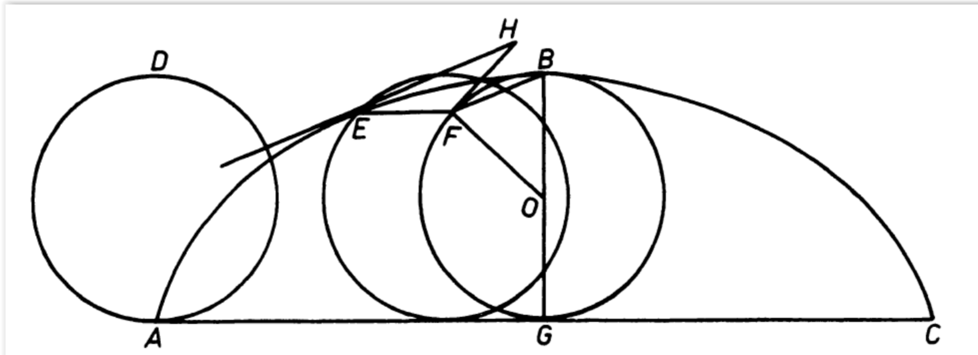

Figura 1.4: Roberval e a tangente à cicloide

Obviamente, Roberval não procedeu como acima. Sua solução está esboçada a seguir, no que seguimos Pedersen ([15], p. 23).

Na Figura 1.4, seja ABC a cicloide gerada pela circunferência AD. O movimento do ponto A, quando a circunferência gira, é a composição de um movimento retilíneo uniforme, na direção de AC e de uma rotação uniforme em torno do centro da circunferência; a direção deste movimento no ponto E é tangente, por E, à circunferência, ou seja, a direção EH.

Como estes movimentos são uniformes, os espaços percorridos (no mesmo tempo) serão proporcionais às respectivas velocidades. A razão destes movimentos é igual à razão entre AC e o comprimento da circunferência. Assim, se o ponto H for definido por

$$EF : FH = AC : (\text{perímetro da circunferência}),$$

então EH será tangente à cicloide no ponto E. A razão do lado direito é igual à unidade, e Roberval demonstra, geometricamente, que EH é paralela a FB, para o que é usado o seguinte resultado (Figura 1.5).

Lema. Seja dada uma semi-circunferência de diâmetro BA e com centro R. Sejam O um ponto sobre a semi-circunferência, OH perpendicular ao diâmetro, OK paralela ao mesmo e OS a tangente à semi-circunferência, por O. Então, a reta OA é a bissetriz do ângulo com vértice em O e lados OH e OS.

Suponha que o ângulo $ARO = \alpha$ seja obtuso. Então, como o triângulo ORA é isósceles, resulta que o ângulo $AOR = \alpha$ e que o ângulo $AOK = \alpha$. Além disso, $KOS = ROH$ pois têm os lados perpendiculares dois a dois, e portanto AOS é igual a AOH, pois são somas de ângulos iguais.

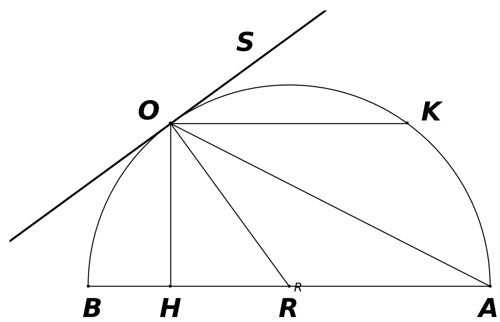

Figura 1.5: O lema de Roberval

De maneira semelhante, lida-se com oa caso em que o ângulo ARO é agudo.

Para construir efetivamente a tangente pelo ponto E da cicloide, Roberval traça EF, a velocidade ao longo de AC, em seguida a circunferência que passa por F e é tangente a AC, o diâmetro GB e obtém FB, o que lhe permite traçar EH (Figura 1.6).

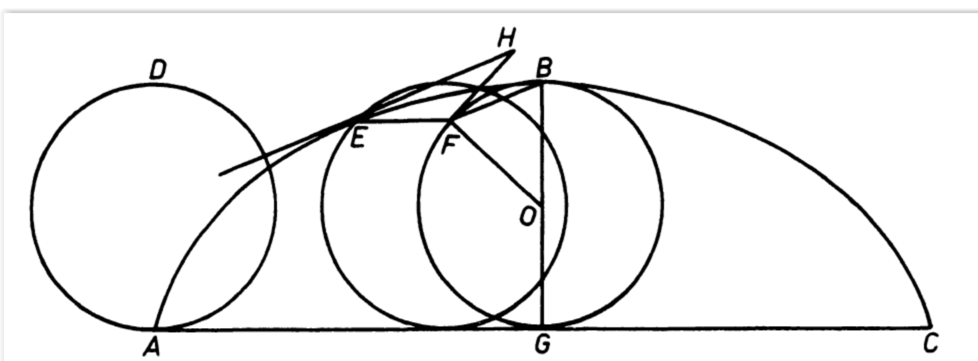

Figura 1.6: A construção da tangente por Roberval

Usando a mesma ideia de composição de movimentos, Roberval estuda, corretamente, um caso bem mais complicado, o da tangente à quadratriz. Vejamos como ele procedeu.

1.1.3 Roberval e a tangente à Quadratriz

A quadratriz

Esta curva resolve dois dos problemas clássicos dos gregos: a quadratura do círculo e a trisseção do ângulo. Para construí-la, suponhamos que no quadrado $ABCD$ o lado AD gira com movimento circular uniforme em torno de A até que coincida com o lado AB. Ao mesmo tempo, o lado DC desce com velocidade constante até coincidir com AB. Os dois movimentos estão sincronizados de maneira que ambos os lados, DC e AD coincidam com AB no mesmo instante.

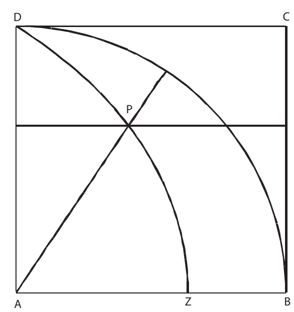

Figura 1.7: A quadratriz

A quadratriz é o lugar geométrico gerado pelas intersecções destes dois lados móveis, a a curva DPZ da Figura 1.7. Ela foi inventada por Hípias de Elis (viveu em torno de 420 a.C.), originariamente em suas tentativas para trissectar o ângulo. Tudo indica que foi Dinóstrato (viveu em torno de 350 a.C.) quem pela primeira vez a usou para fazer a quadratura do círculo.

Seguiremos, nesta parte, exposição feita por Patrícia Nunes da Silva no seminário de história da matemática no Instituto de Matemática da Universidade do Estado do Rio de Janeiro em 2022.

Em primeiro lugar, a fim de seguirmos mais fielmente a apresentação de Roberval, mostraremos a quadratriz como ele o fez. Na Figura 1.8 ela é a curva DFG.

Como diz Pedersen [15], a argumentação de Roberval não é muito clara. Para torná-la mais compreensivel, nós a traduziremos para o nosso simbolismo algébrico, com o cuidado de que ele corresponda às ideias de Roberval.

Para simplificar a apresentação, suporemos que $AB = 1$ e que a rotação e a translação alcançam o lado AB em uma unidade de tempo. Escolheremos

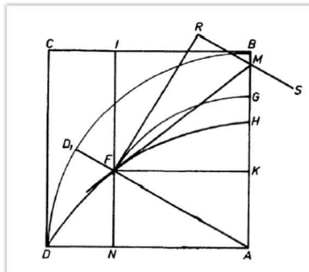

Figura 1.8: Roberval e a tangente à quadratriz-1

D como origem do sistema de coordenadas.

Podemos então descrever, de duas maneiras, as duas composições de movimentos indicadas anteriormente, o de rotação e o de translação.

Primeira maneira – Quando o movimento do ponto F é dado pela composição da rotação de AF (curva $\gamma_1(t)$) e pelo deslocamento de F ao longo de AF (curva $\gamma_2(t)$). Neste caso, as parametrizações a seguir garantem a interseção que gera a quadratriz.

$$\gamma_1(t) = \left(1 - \cos(\frac{\pi\, t}{2}), \operatorname{sen}(\frac{\pi\, t}{2})\right)$$

$$\gamma_2(t) = \left(t - 1 + \cos(\frac{\pi t}{2}), (1-t)\operatorname{tg}(\frac{\pi t}{2}) - \operatorname{sen}(\frac{\pi\, t}{2})\right).$$

Assim, as respectivas velocidades são

$$\gamma_1'(t) = \left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi t}{2}), \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi t}{2})\right).$$

$$\gamma_2'(t) = \left(1 - \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi t}{2}), -\operatorname{tg}(\frac{\pi t}{2}) + \frac{(1-t)\pi}{2}\sec^2(\frac{\pi t}{2}) - \cos(\frac{\pi t}{2})\right).$$

Devemos observar que $\gamma_1'(t)$ e $\gamma_2'(t)$ não são ortogonais.

A quadratriz $\gamma(t)$ é dada por[2]

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) = \left(t, (1-t)\operatorname{tg}(\frac{\pi t}{2})\right), \quad t \in [0,1).$$

[2]Na parametrização adotada, o valor para $t = 1$ pode ser obtido por um processo de limite.

Para $F = \gamma(t), t \in [0,1)$, a tangente à quadratriz é dada por

$$\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + \gamma_2'(t) = \left(1, -\text{tg}(\frac{\pi t}{2}) + \frac{(1-t)\pi}{2}\sec^2(\frac{\pi t}{2})\right).$$

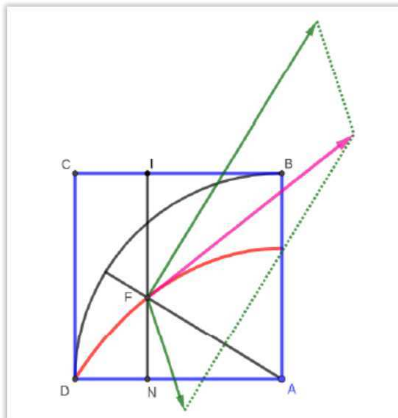

Figura 1.9: Roberval e a tangente à quadratriz-2

Roberval não dispõe de informações sobre o vetor $\gamma_2'(t)$. Para determinar a direção de $\gamma'(t)$ (tangente à diretriz em F, ele adota um sistema de unidades de tal maneira que a velocidade de deslocamento de F coincida com a medida de FK. Isto permite que ele deduza a medida de FR (a velocidade do movimento circular de F). Observe que

$$\frac{NA}{FA} = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

Para compreender que essa construção determina corretamente a direção de $\gamma'(t)$, consideremos uma segunda composição de movimentos (2).

Segunda maneira – Quando o movimento do ponto F é dado pela composição do movimento de IF (curva $\gamma_1(t)$) e pelo deslocamento ao longo de IF (curva $\gamma_2(t)$). Neste caso, para garantir a interseção devemos ter

$$\gamma_1(t)) = (t, 0)$$

$$\gamma_2(t) = \left(0, (1-t)\text{tg}\,(\frac{\pi t}{2})\right).$$

e

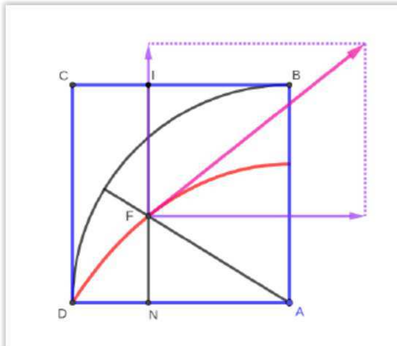

Figura 1.10: Roberval e a tangente à quadratriz-3

$$\gamma_1'(t)) = (1,0)$$

$$\gamma_2'(t) = \left(0, -\mathrm{tg}\,(\frac{\pi t}{2}) + \frac{(1-t)}{2}\sec^2(\frac{\pi t}{2})\right).$$

Vemos que, neste caso, $\gamma_1'(t)$ e $\gamma_2'(t)$ são realmente ortogonais.

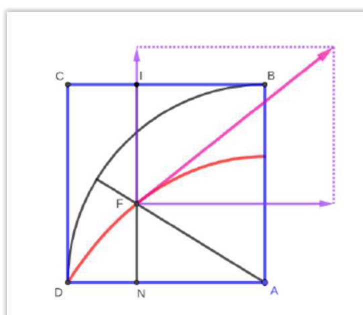

Figura 1.11: Roberval e a tangente à quadratriz-4

A quadratriz $\gamma(t)$ é representada por

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) = \left(t, (1-t)\mathrm{tg}\,(\frac{\pi t}{2}\right), \quad t \in [0,1).$$

Para $F = \gamma(t)$, $t \in [0,1)$, a tangente à quadratriz é dada por

$$\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + \gamma_2'(t) = \left(1, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right).$$

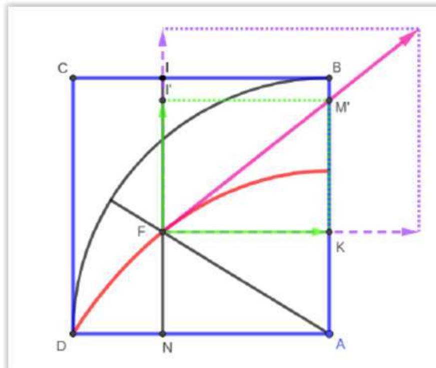

Figura 1.12: Roberval e a tangente à quadratriz-5

Procedamos como Roberval, escolhendo um sistema de unidades tal que a velocidade de deslocamento de F para a direita coincida com a medida de FK. Observe que a composição dos movimentos indicados na Figura (1.8) permite a aplicação da regra do paralelogramo para determinar M'. Isso nos mostra que M' pertence obrigatoriamente à reta suporte de AB. Isso permite que Roberval ao considerar o movimento (1) determine M como descrito anteriormente.

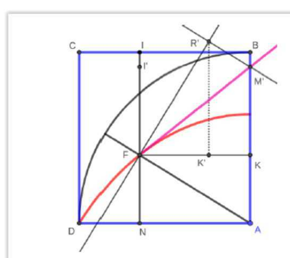

Figura 1.13: Roberval e a tangente à quadratriz-6

Mostraremos agora que $M = M'$. O vetor correspondente relativo ao deslocamento ao longo de IN satisfaz

$$\frac{FI'}{FK} = \frac{-\mathrm{tg}\,(\frac{\pi t}{2}) + \frac{(1-t)\pi}{2}\sec^2(\frac{\pi t}{2})}{1}.$$

Como $FK = 1 - t$ obtemos

$$FI' = -(1-t)\mathrm{tg}\,(\frac{\pi t}{2}) + \frac{(1-t^2)\pi}{2}\sec^2(\frac{\pi t}{2}).$$

Sejam o ponto R' tal que FR' é perpendicular a AF e a $M'R'$ e K' tal que $R'K'$ é perpendicular a FK.

Segue-se que

$$FK' = \frac{\pi(1-t)^2}{2}\mathrm{tg}\,(\frac{\pi t}{2}) \quad \text{e} \quad R'K' = \frac{\pi(1-t)^2}{2}.$$

Assim, $FR' = FR$ e $M = M'$.

Capítulo 2

Fermat

Pierre de Fermat (1601–1665) notabilizou-se por trabalhos em vários campos da matemática: foi um dos criadores da geometria analítica, fez importantes contribuições à teoria dos números, desenvolveu métodos para achar máximos e mínimos e para determinar as tangentes a curvas e resolveu problemas de quadratura.

Neste capítulo, veremos contribuições de Fermat à determinação de tangentes a curvas.

Para bem entender seu "método das tangentes" é importante ver, inicialmente, como ele achava máximos e mínimos. É, portanto, o que faremos inicialmente.

2.1 O método dos máximos e mínimos de Fermat

Fermat fundamenta seu método de máximos e mínimos em ([4], pp. 124–126). Em seu primeiro exemplo, ele divide um segmento AC a fim de que $AE \times EC$ seja um máximo.

Figura 2.1: Dividir AC de maneira que $AE \times EC$ seja máximo

Nas palavras do próprio Fermat,

> Escrevamos $AC = b$ e seja a um dos segmentos, de maneira que o outro será $b - a$, e o produto, cujo máximo é procurado, será $ba - a^2$. Seja agora $a + e$ o primeiro segmento de b; o segundo

será $b-a-e$, e o produto dos segmentos será , $ba-a^2+be-2ae-e^2$; isso pode ser adequalado[1] com o precedente[2]:

$$ba - a^2 + be - 2ae - e^2 \text{ adeq } ba - a^2.$$

Eliminando os termos comuns teremos

$$be \approx 2ae + e^2.$$

Eliminando e obtemos enfim $b = 2a$. Assim, para resolver o problema devemos tomar metade de b.

2.2 Um segundo método para achar máximos e mínimos

Fermat continua e propõe outro método para achar máximos e mínimos:

> Mas se for proposto dividir a mesma reta b de tal maneira que o produto dos segmentos seja igual a z'' (supondo-se, além disso, que esta área seja menor do que $b^2/4$), haverá dois pontos que resolvem o problema, e observa-se que eles estarão situados, respectivamente, de um lado e do outro lado do ponto que corresponde ao produto máximo.
>
> De fato, seja a um dos segmentos da reta b, teremos que $ba - a^2 = z''$; uma equação ambígua, pois pode-se tomar para o segmento a cada uma das duas raízes. Portanto, seja $be - e^2 = z''$ a equação correlacionada. Comparando as duas equações pelo método de Viète:
>
> $$ba - be = a^2 - e^2.$$
>
> Dividindo ambos os lados por $a - e$ obtem-se
>
> $$b = a + e;$$
>
> Além disso, os comprimentos de a e de e serão desiguais.
>
> Se, em vez da área z'', tomarmos outro valor maior, embora sempre menor do que $b^2/4$, os segmentos a e e diferirão menos

[1] No seguinte, denotaremos adequalar por "adeq".

[2] Fermat utilizou uma ideia da obra *Aritmética* de Diofanto, escrita no século III CE. Para Diofanto, este termo significa algo como "aproximadamente" igual. Assim, suporemos que este é o significado de *adequalação* para Fermat.

do que acontecia com os anteriores, os pontos de divisão se aproximando do ponto que constitui o máximo do produto. Quanto mais o produto aumentar, mais, ao contrário, diminue a diferença entre a e e até que ela desaparecerá exatamente no ponto de divisão que corresponde ao produto máximo; neste caso, haverá somente uma única e singular solução, as duas quantidades a e e se tornando iguais.

Ora, o método de Viète aplicado às duas equações acima correlacionadas conduz à igualdade $b = a + e$, e portanto se $e = a$ (o que sempre acontecerá no ponto que constitui o máximo ou o mínimo) ter-se-á, no caso proposto, $b = 2a$, o que significa que se for escolhido o meio do segmento b, o produto dos segmentos será máximo.

Tomemos um outro exemplo: dividir o segmento b de tal maneira que o produto do quadrado de um dos segmentos pelo outro seja máximo.

Seja a um dos segmentos; deve-se ter que $ba^2 - a^3$ seja máximo. A equação igual e correlacionada é $be^2 - e^3$. Comparando as duas equações pelo método de Viète:

$$ba^2 - be^2 = a^3 - b^3;$$

dividindo ambos os lados por $a - e$ obtém-se

$$ba + be = a^2 + ae + e^2,$$

que fornece a forma das equações correlacionadas.

Para ober o máximo, faça $e = a$; obtém-se

$$2ba = 3a^2 \quad \text{ou} \quad 2b = 3a;$$

o problema está resolvido.

2.3 A tangente à parábola

Usando seu método de adequalação, Fermat acha a tangente à parábola.

Seja B o ponto de interseção da parábola com uma perpendicular ao eixo da curva e seja K o ponto, não mostrado na figura, em que a perpendicular ao eixo da parábola e que passa por I intercepta a curva (Figura 2.2). Além disso, seja O o ponto em que essa perpendicular corta a tangente à parábola pelo ponto B

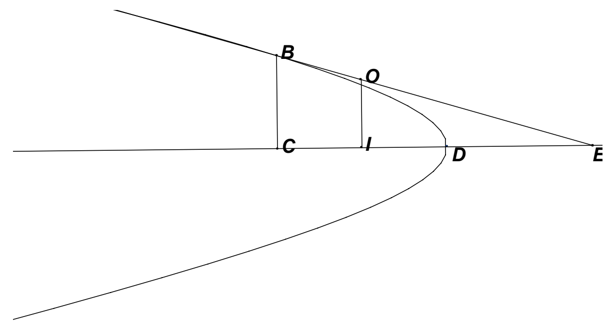

Figura 2.2: Fermat e a tangente à parábola

Pelas propriedades da parábola, temos que

$$\frac{CD}{DI} = \frac{BC^2}{IK^2}.$$

Como $IO > IK$, segue-se que

$$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{IO^2}. \tag{2.1}$$

A semelhança dos triângulos BCE e OIE acarreta que

$$\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}. \tag{2.2}$$

De tudo isso decorre imediatamente que

$$\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}.$$

Fermat introduz a seguinte notação: $CD = d$, que é conhecido; $CE = a$ e $CI = e$.

Então (2.1) transforma-se em:

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}.$$

Mas isso é equivalente a escrever

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Agora, Fermat usa seu processo de “adequalação”; ele afirma que se temos uma desigualdade válida para qualquer e, então, essa desigualdade se transforma em uma igualdade. Anacronicamente, podemos dizer que Fermat faz uma passagem ao limite para obter uma igualdade.

Em nosso caso, temos

$$da^2 + de^2 - 2dae \approx da^2 - a^2e \Longrightarrow de^2 + a^2e \approx 2dae.$$

Dividindo por e obtemos

$$de + a^2 \approx 2da.$$

Disso, como e é arbitrário, Fermat obtém que

$$a^2 = 2da.$$

Fermat conclui seu texto afirmando que

> Provamos asim que CE é igual ao dobro de CD, o que sabemos ser verdade.

2.4 A tangente à cicloide

Estudaremos agora como Fermat determinou a tangente a uma cicloide, em um ponto qualquer da curva. Para isso, é necessário, em primeiro lugar, lembar que Fermat tinha sabia achar tangentes a curvas algébricas, o qual ele conseguiu adaptar para algumas curvas transcendentes, como a cicloide. A fim de poder fazer esta adaptação, Fermat enunciou dois princípios[3] afirmando que é permitido:

1 – Substituir as ordenadas das curvas pelas de suas tangentes já determinadas.

2 – Substituir os comprimentos de arco das curvas pelas respectivas partes das tangentes já determinadas.

Veremos como Fermat utiliza esses dois princípios para sua determinação da tangente à cicloide. O que faremos, a seguir, é detalhar a parte do texto da Kirsti Pedersen ([15], pp. 29, 30) que trata do assunto, pois sua leitura é difícil, devido à sua concisão. A Figura 2.3 será nosso guia.

Sejam HGC uma cicloide com vértice em C seu círculo gerador CMF, C seu ponto máximo e RB a tangente em um ponto arbitrário R. Façamos

[3] Fermat (Oeuvres 1, p. 162).

$CD = x$, $RD = f(x)$, $MD = g(x)$ e seja $a = DB$, o que procuramos determinar.

Além disso, faça $DE = e$, e trace NE paralela a RD, e seja N seu ponto de interceção comRB e O seu ponto de interceção com o círculo.

Todo o raciocínio de Fermat se baseia simplesmente na seguinte propriedade da cicloide:

$$f(x) = RM + MD = \text{arco}\, CM + g(x). \tag{2.3}$$

A única coisa que não é imediata é por que RM é igual ao arco CM. Para perceber isso, observe que quando o círculo gerador se desloca de sua posição inicial, em H, girando para a direita, até que H esteja em R, o círculo terá girado por um arco exatamente igual ao arcoCM.

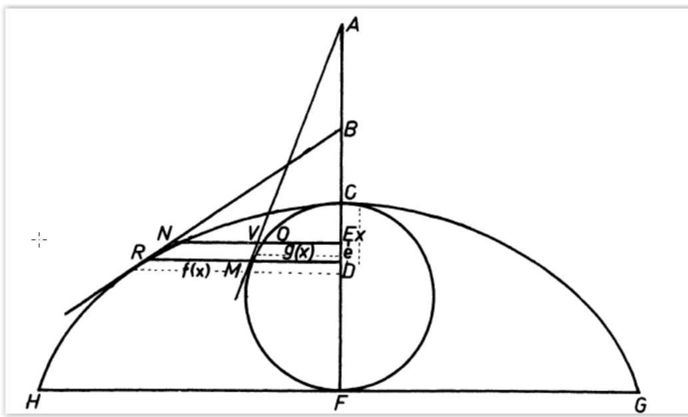

Figura 2.3: a CICLOIDE

Pela semelhança dos triângulos RDB e NEB temos que

$$\frac{NE}{f(x)} = \frac{(a-e)}{a} \Longrightarrow NE = \frac{f(x)(a-e)}{a}. \tag{2.4}$$

Então, usando o princípio (1) Fermat conclui que

$$NE \approx f(x-e), \tag{2.5}$$

com

$$f(x-e) = \text{arco } CO + g(x-e) = \text{arco } CM - \text{arco } OM + g(x-e). \tag{2.6}$$

Sejam MA a tangente ao círculo V sua interseção com NE e $MA = d$, $AD = b$.

Pelo primeiro princípio Fermat obtém

$$g(x-e) \approx EV \approx \frac{g(x)(b-e)}{b}, \tag{2.7}$$

e do segundo

$$\text{arco } OM \approx MV = \frac{de}{b}. \tag{2.8}$$

Assim,

$$f(x-e) \approx \text{arco}\, CM - \frac{de}{b} + \frac{gx(b-e)}{b}, \tag{2.9}$$

Ora, 2.9 juntamente com 2.3 e 2.4, permitem escrever

$$\frac{\text{arco}\, CM + g(x)(a-e)}{a} \approx \text{arco}\, CM - \frac{de}{b} + \frac{f(x)(b-e)}{b}. \tag{2.10}$$

Assim, pelo processo de adequalação,

$$\frac{\text{arco}\, CM + g(x)}{a} = \frac{d+g(x)}{b}. \tag{2.11}$$

Isso acarreta que

$$\frac{f(x)}{a} = \frac{d+g(x)}{b}. \tag{2.12}$$

Geometricamente, já vimos, no capítulo sobre Roberval, que

$$\frac{d+g(x)}{b} = \frac{g(x)}{x}, \tag{2.13}$$

de maneira que a tangente por R é paralela a MC.

2.5 Detalhes sobre o procedimento de Fermat

Para traçar a tangente à cicloide, Fermat se baseia no seguinte resultado, que já expusemos mas que repetimos para conveniência do leitor.

Lema: Considere o semi-círculo de diâmetro BA e centro R; seja O um ponto sobre o semi-círculo. Seja OH perpendicular a BA. Então, a reta OA

é a bissetriz do ângulo formado por OH e pela tangente à semi-circunferência no ponto O (Figura 2.4).

Com efeito, seja OK paralela a BA. Suponha que o ângulo ARO é obtuso. Então os ângulos OAR e AOR são iguais, e o ângulo AOK é igual a ambos, pois as retas OK e BA são paralelas. e os ângulos KOS e ROH são iguais pois têm os lados correspondentes perpendiculares e $AOS = AOH$ como soma de ângulos iguais.

É fácil ver que o mesmo resultado vale se o ângulo ARO for agudo.

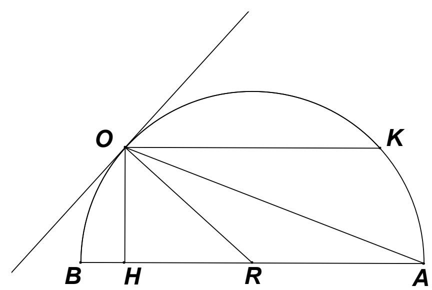

Figura 2.4: O lema de Fermat

Uma aplicação direta deste resultado ao triângulo retângulo GFB (Figura 2.5) justifica a construção geométrica de Fermat.

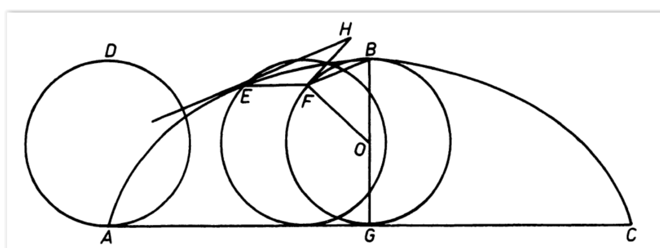

Figura 2.5: O lema de Fermat

Capítulo 3

Descartes

3.1 Introdução

René Descartes (1596–1650) foi um filósofo, físico e matemático francês que influenciou profundamente a filosofia e a matemática.

Como afirmado por Carvalho [7],

> O grande objetivo do trabalho de Descartes era provar que a investigação racional podia gerar conhecimento e seus trabalhos em matemática se destinavam, em parte, a mostrar como isso podia ser feito. Em verdade, para Descartes, a matemática era o paradigma da pesquisa racional [...] (Carvalho [7], p. 71).

Ele expôs seu método para garantir a obtenção de conhecimentos certos, indubitáveis, em seu livro *Discours de la Méthode*. Em um de seus apêndices, intitulado *La Géométrie* (*A Geometria*) ele mostra como fazer isso em matemática.

O *A Geometria* está dividido em três partes. É na segunda que Descartes ataca o problema de achar a tangente a uma curva. Sobre isso, ele afirma

> Eis por que acreditaria ter posto aqui tudo o que se requer para os elementos das linhas curvas, quando, em geral, tiver dado a maneira de traçar as linhas retas que caem em ângulos retos, sobre os tais pontos que se quiser escolher. E ouso dizer que é este o problema o mais útil e o mais geral, não apenas o que eu saiba, mas ainda aquele que jamais desejei saber em geometria. (Descartes, ([8], p. 53)

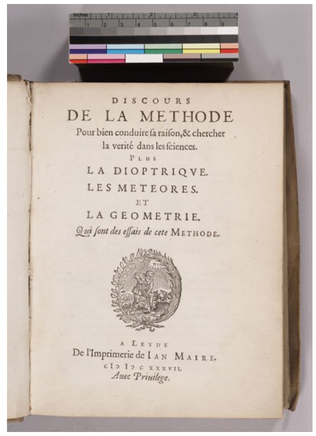

Figura 3.1: O *Discours de la Méthode*.

A afirmação de Descartes mostra bem a importância que, na época, se dava à procura de tangentes a curvas e sua crença de que seu método era superior aos dos outros matemáticos. Vejamos como ele procedeu.

Neste capítulo, veremos como René Descartes atacou o problema de achar as tangentes de curvas planas.

3.1.1 O primeiro tratamento das tangentes no *La Géométrie*

Descartes apresenta duas maneiras de achar tangentes em seu livro. A primeira é descrita a seguir

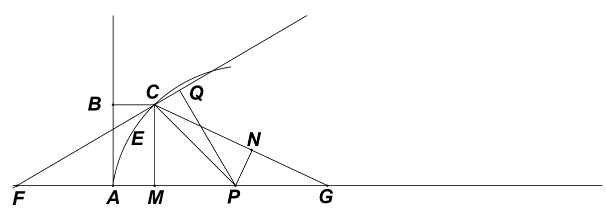

Figura 3.2: A determinação da tangente

Descartes procede da seguinte maneira (Veja a Figura 3.2).

Faça $CB = MA = y$ e $CM = BA = x$ e procuremos uma relação entre x e y. Agora, faça $PC = s$ e $PA = v$, ou $PM = v - y$. Como PMC é um triângulo retângulo temos que $s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$. ([8], p. 54).

Assim,

$$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}.$$

Temos também que

$$y = v + \sqrt{s^2 - x^2}.$$

Pode-se eliminar x ou y nessas duas equações. Fazendo isso, como diz Descartes "resta sempre uma soma na qual não há mais que uma quantidade indeterminada, x ou y".

Descartes aplica imediatamente esse roteiro à elipse $x^2 = ry - \frac{t}{q}y^2$ ([8], p. 54).

Eliminando x^2, obtemos

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2,$$

ou seja

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r} = 0.$$

Observe que, ao acharmos y, estamos obtendo o comprimento de um segmento, como mostrado na Figura 3.2.

3.1.2 O segundo método de Descartes

A segunda maneira apresentada por Descartes é a seguinte ([8], pp. 57-61).

Considere a curva OEC, da Figura 3.3, cuja tangente no ponto C desejamos determinar. Uma circunferência cujo centro esteja sobre o eixo OX e que passe pelo ponto C, em geral intercepta a curva OEC em dois pontos, C e E. Há somente uma exceção, mostrada na Figura 3.4, quando o centro $P = (h, 0)$ da circunferência se encontra exatamente sobre a normal à curva OEC, pelo ponto C. Neste caso, a circunferência é tangente à curva.

Se conseguirmos determinar as coordenadas do ponto P, ou seja, determinar h, é fácil achar a tangente à curva, por C, pois ela será perpendicular à normal pelo mesmo ponto.

Este método de Descartes, exposto no *La Géométrie* é extremamente elegante. Em princípio, ele funciona para curvas descritas por equações algébricas $f(x, y) = 0$. No entanto, rapidamente ele se torna tecnicamente complicado, como será visto na próxima seção.

Vejamos um exemplo mais simples do emprego do segundo método de Descartes.

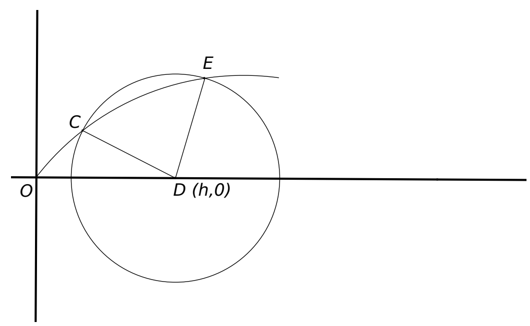

Figura 3.3: Construção de Descartes para achar a tangente a uma curva

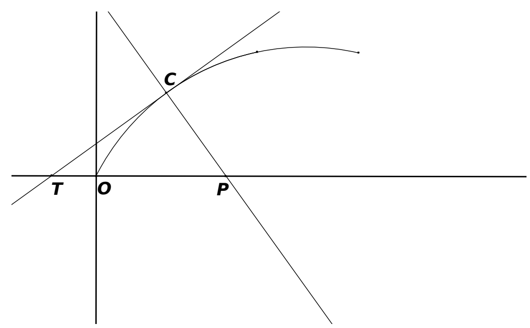

Figura 3.4: A determinação da tangente

3.1.3 Exemplos de aplicação do método de Descartes

Determinemos o ponto P no caso em que a equação da curva OCE é $y = \sqrt{x}$. Sejam (a^2, a) as coordenadas do ponto C, r o raio da circunferência, e $(h, 0)$ as coordenadas do ponto P. Então, a equação da circunferência é

$$(x - h)^2 + y^2 = r^2$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0.$$

Os pontos de interseção da curva com a circunferência são determinados resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

Eliminando y, obtemos a equação do segundo grau

$$x^2 + (1 - 2h)\,x + \left(h^2 - r^2\right) = 0$$

Em geral, esta equação tem duas soluções para x. Sabemos que a circunferência e a curva se cortam no ponto (a^2, a), ou seja, $x = a^2$ é uma das raízes da equação. Para ela ser a **única** raiz, é necessário e suficiente que $x = a^2$ seja uma raiz dupla. A fim de que isto aconteça, devemos ter

$$x^2 + (1 - 2h)\,x + \left(h^2 - r^2\right) = (x - a)^2.$$

Desenvolvendo o lado direito e comparando os coeficientes, teremos

$$1 - 2h = -2a^2 \to h = a^2 + \frac{1}{2}$$

Assim, a circunferência de centro $(x = a^2 + \frac{1}{2}, 0)$ será tangente ao gráfico de $y = \sqrt{x}$ no ponto (a^2, a).

Se tentarmos aplicar o método de Descartes para encontrar a tangente à curva de equação $y = x^3$, e que passa pelo ponto de coordenadas (a, a^3), vemos que a situação se torna tecnicamente enfadonha e longa, embora não apresente dificuldades conceituais.

Com efeito, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} y^2 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0 \\ y = x^3 \end{cases}$$

Assim, temos que

$$x^6 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0.$$

Se quisermos achar a tangente que passa pelo ponto (a, a^3), esta equação deverá ter uma raiz dupla para $x = a$.

Assim, podemos escrever

$$x^6 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = (x - a)^2(x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F).$$

Desenvolvendo o lado direito obtemos

$$x^6 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = x^6 + (B - 2a)\,x^5 + (a^2 - 2aB + C)x^4$$

$$+(a^2B - 2aC + D)x^3 + (a^2C - 2aD + F)x^2 + \left(a^2D - 2aF\right)x + a^2F.$$

Comparando os coeficientes, obtemos o sistema

$$(B - 2a) = 0 \tag{3.1}$$

$$\left(a^2 - 2aB + C\right) = 0 \tag{3.2}$$

$$\left(Ba^2 - 2aC + D\right) = 0 \tag{3.3}$$

$$\left(Ca^2 - 2aD + F\right) = 1 \tag{3.4}$$

$$\left(Da^2 - 2aF\right) = -2h \tag{3.5}$$

$$a^2F = h^2 - r^2 \tag{3.6}$$

Com a Equação (3.1) obtemos

$$B = 2a. \tag{3.7}$$

Usando (3.2) e (3.7) temos

$$a^2 - 2a\,(2a) + C = 0 \rightarrow C = 3a^2. \tag{3.8}$$

Utilizando estes valores de B e C em (3.3) obtemos

$$a^2(2a) - 2a(3a^2) + D = 0 \tag{3.9}$$

o que acarreta

$$D = 4a^3. \tag{3.10}$$

Usando todos estes valores em (3.4) obtemos

$$a^2(3a^2) - 2a(4a^3) + F = 1 \rightarrow F = 1 + 5a^4$$

Enfim, por meio de (3.5) chegamos a

$$a^2\left(4a^3\right) - 2a\left(1 + 5a^4\right) = -2h \rightarrow h = a + 3a^5,$$

ou seja, as coordenadas do centro do círculo tangente são $(a + 3a^5, 0)$.

Estes valores nos permitem escrever

$$x^6 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = (x - a)^2 (x^4 + 2ax^3 + 3a^2x^2 + 4a^3x + 1 + 5a^4).$$

Você observa que os cálculos realmente podem se tornar complicados. Como diminuir o trabalho envolvido na aplicação do método de Descartes para achar tangentes a curvas? É o que veremos a seguir.

3.2 Schooten e Hudde

As dificuldades técnicas que surgem na utilização do método de Descartes diminuem bastante se usarmos a chamada “regra de Hudde”, devida ao matemático holandês Hudde, que participou ativamente do círculo de matemáticos reunidos em torno de van Schooten.

Frans van Schooten (1615-1660) foi um matemático competente, lembrado principalmente por ter contribuído fortemente para a difusão das ideias matemáticas de Descartes. Ele foi professor de matemática na Universidade de Leiden e dentre seus alunos contam-se Christiaan Huygens, Johann van Waveren Hudde e René de Sluze (Hofmann 1981). Já em 1649 publicou uma tradução do *La Géométrie* para o latim, a língua culta da Europa, na época. Com ajuda de seus colegas matemáticos aumentou aos poucos essa tradução, adicionando-lhe apêndices visando a completá-la e a torná-la mais compreensível. Assim, como o latim era a língua dos cientistas da época, as ideias de Descartes puderam se difundir mais facilmente por toda a Europa. A edição do *La Géométrie* em dois volumes, de 1659 e 1661 respectivamente, contém apêndices de Jan de Witt, Johann Hudde e Hendrick van Heuraet. Foi esta a edição que Isaac Newton comprou e leu.

Jan (ou Johann) Hudde (1628 – 1704) formou-se em Direito, e seu envolvimento com a matemática provavelmente se encerra em 1663, data após a qual não se conhece em suas atividades nada relacionado à matemática, tendo ele se dedicado a partir daí à política, chegando a ser prefeito de Amsterdam. Em 1657 ele se correspondeu com Sluse, Huygens e Schooten sobre quadraturas, tangentes e centros de gravidade de curvas algébricas (Haas 1981). Haas considera Hudde o mais brilhante dos alunos de Schooten, tendo sido elogiado por Leibniz, que, em 1697, escreveu que somente se poderia esperar uma solução do problema da Braquistóocrona por Newton, L'Hospital, os Bernoullis e Hudde caso este último “não tivesse abandonado tais pesquisas há muito tempo” (Haas 1981).

3.3 A regra de Hudde

No apêndice, em forma de carta, à edição citada de van Schooten, Hudde afirmou que

> Se em uma equação duas de suas raízes são iguais, e ela for multiplicada por uma progressão aritmética arbitrária, obviamente o primeiro termo da equação pelo primeiro termo da progressão, o segundo termo da equação pelo segundo termo da progressão e assim sucessivamente, afirmo que o produto será uma equação em que uma das acima mencionadas raízes se encontrará.

Em outras palavras, suponha que os números $p+qi$ estão em progressão aritmética, para $i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-2$. Então, o polinômio

$$F(x) = \sum_i a_i x^i$$

tem uma raiz dupla no ponto e se e somente se o polinômio

$$F^*(x) = \sum_i a_i (p+qi) x^i$$

tem uma raiz simples em e.

Hudde dá uma demonstração para um polinômio de grau 5, mas que funciona para qualquer grau, como veremos.

3.3.1 Demonstração da regra de Hudde

Demonstremos agora a regra de Hudde.

Suponha que e é uma raiz dupla do polinômio $f(x) = 0$. Então,

$$f(x) = (x-e)^2(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-2}x^{n-2})$$

$$= (x-e)^2\left(\sum_{k=0}^{k=n-2} c_k x^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n-2} c_k (x^{k+2} - 2ex^{k+1} + e^2 x^k).$$

Se esta equação for multiplicada termo a termo por uma progressão aritmética $p+qi$, na qual p e q são números inteiros, e $i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-2$, obtemos o polinômio

$$g(x) = \sum_{k=0}^{k=(n-2)} c_k \left\{ (p + q(k+2))\, x^{k+2} - 2e((p + q(k+1))\, x^{k+1} + e^2(p + qk) \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=(n-2)} c_k (p + qk)(x^2 - 2ex + b^2) + \sum_{k=0}^{k=(n-2)} c_k 2q(x^{(k+2)} - ebx^{(k+1)})$$

$$= (x-e)^2 \sum_{k=0}^{(n-2)} (p + qk)\, x^k + 2q(x-e) \sum_{k=0}^{(n-2)} c_k x^{k+1}$$

e vemos obviamente que e é uma raiz de $g(x)$.

Uma demonstração moderna da regra de Hudde seria a seguinte.

É fácil ver que

$$g(x) = pf(x) + qf'(x).$$

Se $f(x) = (x-a)^2 h(x)$,
temos

$$f'(x) = 2(x-a)h(x) + (x-a)^2 h'(x).$$

Assim, se a é uma raiz dupla de $f(x)$, então a é também uma raiz de $f(x)$ e reciprocamente.

Um exemplo tornará claro o funcionamento da regra.

3.3.2 Exemplo de funcionamento da regra de Hudde

Considere o polinômio[1]

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

e a progressão aritmética 3, 2, 1, 0.

Disponhamos o procedimento como segue

x^3	$-4x^2$	$+5x$	-2
3	2	1	0
$3x^3$	$-8x^2$	$+5x$	

[1] Vê-se facilmente que este polinômio pode ser fatorado como $(x-2)(x-1)^2$.

Então, a regra de Hudde afirma que e é raiz dupla de $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ se e somente se $3x^3 - 8x^2 + 5x$ tem a raiz e.

Ora, como é fácil verificar

$$3x^3 - 8x^2 + 5x = x(x-1)(3x-5).$$

E vemos assim que $x = 1$ é raiz simples de $3x^3 - 8x^2 + 5x = 0$ e dupla de $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

Mas, como isso ajuda a resolver o problema de determinar a tangente a uma curva? É o que veremos na próxima seção.

3.4 A regra de Hudde e a determinação de tangentes

O que esta regra tem a ver com o problema de facilitar os cálculos na utilização do método de Descartes para a determinação das tangentes às curvas? Isto acontece porque a escolha judiciosa da progressão aritmética permite reduzir consideravelmente os cálculos envolvidos.

Relembremos o que foi feito na seção 4 para achar a tangente a $y = x^3$, quando chegamos à equação

$$x^6 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0,$$

com a qual temos que determinar h e r.

Usemos o método de Hudde para determinar suas raízes múltiplas. Para tal, escolhamos a progressão aritmética 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 e disponhamos o procedimento da seguinte maneira

$$\begin{array}{ccccccc}
x^6 & +0x^5 & +0x^4 & +0x^3 & +x^2 & -2hx & +h^2-r^2 \\
6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
\hline
6x^6 & +0^5 & +0x^4 & +0x^3 & 2x^2 & \text{-}2hx & 0
\end{array}$$

Desta maneira, obtivemos, com a aplicação da regra de Hudde, o polinômio

$$6x^6 + 2x^2 - 2hx = 0,$$

que nos permite facilmente calcular o valor de h:

$$h = \frac{6x^5 + 2x}{2}.$$

Como estamos procurando determinar a tangente no ponto (a, a^3), chegamos a

$$h = \frac{6a^5 + 2a}{2} = 3a^5 + a,$$

resultado que coincide com o que obtivemos anteriormente e vemos que nosso trabalho foi muito facilitado.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, Bruna F. *A Geometria de René Descartes*. 2ª edição. São Paulo: Livaria da Física, 2017.

[2] BARBIN, Evelyne. *La Révolution Mathématique au XVII Siècle*. Paris: Ellipses, 2006.

[3]

[4] BESSOT, Didier et al.. *Aux Origines du Calcul Infinitésimal*. Paris: Ellipses, 1999.

[5] BOYER, Carl B. *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover, 1959.

[6] CARVALHO, Aníbal Scipião Gomes de. *A teoria das Tangentes antes da Invenção do Cálculo Diferencial*. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1919.

[7] CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. Descartes e o Problema de Pappus. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, vol 7, pp. 71-81, 2020.

[8] DESCARTES, René. *A Geometria* (tradução e comentários por Bruna F. Barbosa, Clediane M. da Silva, Filipe B. Brant e Raquel A. Sapunaru). 2a edição. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

[9] *Pierre de Fermat*: *Oeuvres*, P. Tannery, C. Henry (eds). Paris, 1891-1922, I, pp. 133-135; tr. D. J. Struik, *A Source Book in Mathematics*, 1200-1800, Harvard University Press, 1969, pp. 223-224.)

[10] GRATTAN-GUINNESS, Ivor. *From the Calculus to Set Theory*, 1630 – 1910. Princeton, NJ: Princeton University Press. 1980.

[11] HAAS, Karl Heinz. Jan Hudde. Charles Coulston Gillispie (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 6, pp. 536-538. New York: Charles Scribner's Sons, 1981.

[12] HOFMANN, J. E.. Frans van Schooten. Charles Coulston Gillispie (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 12, pp. 205-207. New York: Charles Scribner's Sons, 1981.

[13] MARTIN, John. The Helen of Geometry. *The College Mathematics Journal* 41(1), pp. 17-28. 2010.

[14] PARADÍS, Jaume; PLA, Josep; PELEGRI, Viader. Fermat's method of quadrature. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 14(1), pp. 5–51, 2008.

[15] PEDERSEN, K. Møller. Techniques of the calculus, 1630-1660. In Grattan-Guinness (ed.). *From the Calculus to Set Theory*, pp. 10-48. Princeton, NJ: Princeton University Press. 1980.

[16] SKINNER, Lindsay, *The World Before Calculus*: *Historical Approaches to the Tangent Line Problem*. Western Washington University Honors Program Senior Projects. 13. (2015).

[17] WIELEITNER, Heinrich. Bemerkungen zu Fermats Methode der Aufsuchung von Extremwerten und der Bestimmung von Kurventangenten. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereingung*, 38, pp. 24-35, 1929.